Содержательный модуль 2

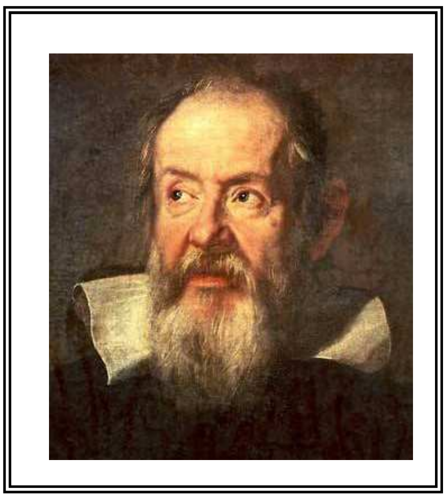
Основные сведения метрологии

2.1. Истоки математического оценивания геодезических измерений в лицах и персоналиях

Истоки решения задач, связанных с измерением земельных участков, построения планов жилищ, ориентации человека в пространстве и во времени уходят в глубину веков. Человечеству понадобились тысячелетия для того чтобы научится измерять большие расстояния с учетом пересеченной местности, а также на основе измерений хорошо ориентироваться в пространстве и во времени.

Основой геодезической науки по праву считают астрономию и математику, в частности, геометрию. Они позволили человеку перейти от качественных наблюдений к количественному оцениванию, а затем и к математической обработке соответствующих измерений.

Справедливо можно считать Галилео Галилея (см. рис.1.4) первым естествоиспытателем, который на основе точных математических (количественных) расчетов сделал множество открытий в естествознании. Например, используя экспериментальный метод обнаружил либрацию Луны (небольшие периодические покачивания Луны относительно центра). Многочисленные экспериментальные исследования, которые проводил Г. Галилей, сопровождались измерениями различных физических величин. Именно Г.Галилею принадлежит фраза «Тот, кто хочет решать вопросы естественных наук без помощи математики, ставит неразрешимую задачу. Следует измерять то, что измеримо, и делать измеримым то, что таковым не является» [2].



ГАЛИЛЕЙ (Galilei) Галилео (1564—1642) — итальянский мыслитель эпохи Возрождения, основоположник классической механики, астроном, математик, физик, один из основателей современного экспериментально-теоретического естествознания, основатель новой механистической натурфилософии. Первым осуществил парадигмальное разграничение естествознания и философии. (По Гёте, Г. "умер в тот год, когда родился Ньютон. Это — праздник Рождества нашего нового времени"). Профессор Пизанского университета (с 1589), после вынужденного отъезда из Пизы работал на кафедре математики Падуанского университета (1592—1610 г.г.).

Рис.1.4. Выдающийся мыслитель эпохи Возрождения

Огромная заслуга Г.Галилея заключается в том, что он предложил экспериментально-теоретический метод исследований, который до сих пор используется современной наукой. Изобретенные им приборы: телескоп, микроскоп, гидростатические весы для определения удельного веса твердых тел, пропорциональный циркуль, используемый в чертежном деле и др. позволяли проводить исследования методом измерений различных процессов и явлений. Это дает основание полагать, что именно Г.Галилей стоял у истоков создания метрологии, теории измерений и теории ошибок.

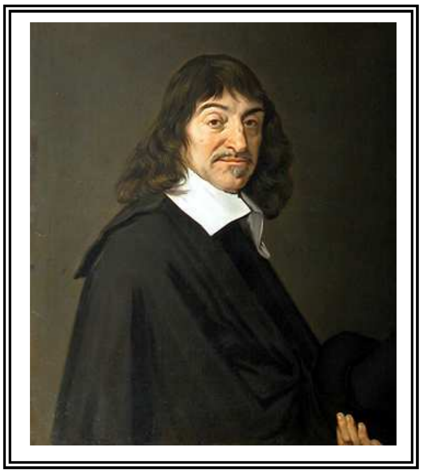
Современниками Г.Галилея были выдающиеся математики Рене Декарт (1596 – 1650 г.г.) и Пьер Ферма (1601 – 1665 г.г.). Выдающаяся заслуга Р. Декарта (см. рис. 1.5) заключается в описании метода, который предполагает достижение достоверного знания. Он описан в работе «Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках» [3]. Здесь он выделяет четыре положения, которые характеризуют этот метод:

1) начинать с несомненного и самоочевидного, т. е. с того, противоположное чему нельзя помыслить;

2) разделять любую проблему на столько частей, сколько необходимо для ее эффективного решения;

3) начинать с простого и постепенно продвигаться к сложному;

4) постоянно перепроверять правильность умозаключений.



РЕНЕ ДЕКАРТ (фр. René Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезий; 31 марта 1596, Лаэ (провинция Турень), ныне Декарт (департамент Эндр и Луара) — 11 февраля 1650, Стокгольм) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике, предтеча рефлексологии.

Афоризм

Все науки настолько связаны между собою, что легче изучать их все сразу, нежели какую-либо одну из них в отдельности от всех прочих.

Рис. 1.5. Выдающийся математик эпохи Возрождений

Обратим внимание читателя, что сформулированные Р.Декартом положения метода достижения достоверного знаний созвучны с дидактическими принципами основателя современной педагогики чешского педагога и писателя Я.А. Коменского (1592 -1670 г.г.), которые изложены им в книге «Великая дидактика». В этой книге выделены: принцип наглядности обучения, сознательности в обучении, систематичности обучения, последовательности обучения и основательности изучения учебного материала.

Этот факт свидетельствует о том, что обучение и приобретение достоверных знаний близкие понятия. Поэтому в процессе изложения и структуризации данного учебного материала будем учитывать, как метод Р. Декарта, так и принципы дидактики Я.А. Коменского.

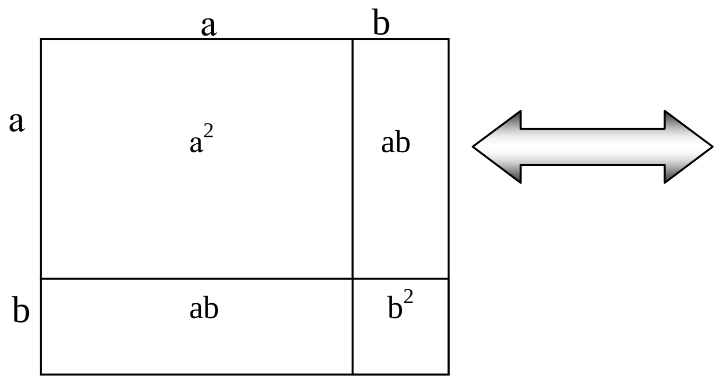
Возвращаясь к оценкам вклада Р.Декарта в науку, и в математику, в частности, следует привести его суждение о том, что есть математика. Р.Декарт писал: «К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо **порядок**, либо **мера** и совершенно не существенно будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера. Таким образом, должна существовать некая общая наука, объясняющая всё относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным, но старым, уже вошедшим в употребление именем Всеобщей математики» [4]. Отсюда следует, что основу методологии геодезии как науки составляет высшая математика.

Для развития геодезии Р.Декарт получил важнейшие результаты. Он разработал основы аналитической геометрии, суть которой состоит в приложении алгебры к геометрии и обратно – геометрии к алгебре. Примером могут служить преобразования показанные на рис. 1.6, где приведена аналитическая запись (формула) и ее геометрическая интерпретация.

Р.Декарт показал, что всякая кривая может быть выражена уравнением между двумя переменными величинами, и обратно – всякое уравнение с двумя переменными может быть выражено кривой. Это открытие имело огромное значение не только для математики, но и для других наук, в том числе геодезии, оперирующей точными величинами – числом, мерой и весом.

Геометрическая интерпретация аналитического соотношения

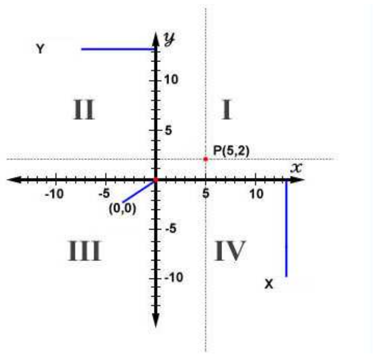
Аналитическая интерпретация геометрических построений



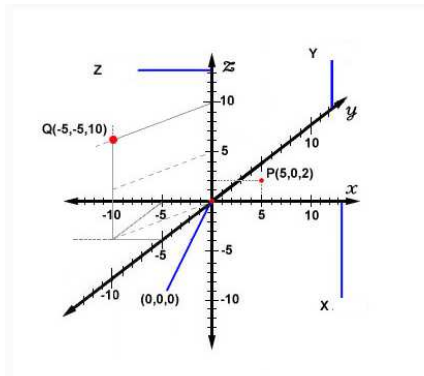
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Рис. 1.6. Геометрические построения и их интерпретация на языке символов

Основополагающим понятием в геодезии является «система координат». Р.Декарт предложил двухмерную (прямоугольную) и трехмерную системы координат с обозначением точек в этих системах. Они иллюстрируются на рис.1.7.



Точка P имеет координаты (5,2)



Точка P имеет координаты (5,0,2),
а точка Q — координаты (-5,-5,10)

Рис. 1.7. Декартовы системы координат

Кроме того, рассматривая результаты полученные Р.Декартом с точки зрения языкознания (лингвистики) можно утверждать, что по сути он предложил математический язык вводя соответствующие обозначения переменных, констант (коэффициентов), отношений т.е. лексику, а также синтаксис – правила записи математических соотношений, которые сохранились и используются современными математиками. В качестве примера приведем одну и туже формальную запись французского математика Франсуа Виета (1540 – 1603 г.г.) и запись на математическом языке Р.Декарта

$$\frac{D\,in\left[B\,cubum\,2 - D\,cubo\right]}{B\,cubo + D\,cubo} \Leftrightarrow \frac{D\left(2B^3 - D^3\right)}{B^3 + D^3}.$$

Видно, что правая часть соотношения имеет современную форму.

Подытоживая сказанное, очевидно, будет правильно говорить не о вкладе Р.Декарта в геодезию, а создании им математического инструментария, который позволяет описывать геодезические объекты, определять их координаты с высокой степенью точности и достоверности.

Исследования результатов и достижений в эпоху Возрождения в области естественных наук (физике, механике, астрономии и др.) показывают, что они получены благодаря развитию математики. Примечательно, что большинство выдающихся ученых эпохи Возрождения были не только физиками, механиками, философами, астрономами, но и математиками.

Христиан Гюйгенс (1629 – 1695 г.г.) был не только прекрасным физиком, механиком и астрономом, но и хорошим математиком (см. рис.1.8). Он изобрел маятниковые часы, усовершенствовал телескоп Г.Галилея. Его труды по теоретической механики оказывали огромное влияние на молодого Ньютона. В 1657 году Х.Гюйгенс написал приложение «О расчётах в азартной игре» к книге его учителя Ван Схоутена «Математические этюды». Многие исследователи истории математики считают, что наряду с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, Христиан Гюйгенс заложил основы теории вероятностей, которую развил Якоб Бернулли.

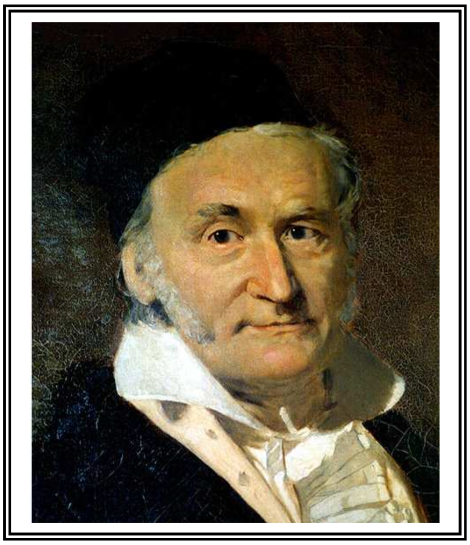
Блез Паскаль (фр. Blaise Pascal, 19 июня 1623—19 августа 1662) — французский математик, физик, литератор и философ. Классик французской литературы, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создатель первых образцов счётной техники, автор основного закона гидростатики [6].

Исаа́к Нью́тон (англ. Sir Isaac Newton, 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта 1727 по григорианскому календарю) — великий английский физик, математик и астроном. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он описал закон всемирного тяготения и так называемые Законы Ньютона, заложившие основы классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цветности и многие другие математические и физические теории [7].

Христиа́н Гю́йгенс фон Цюйлихен (нидерл. Christiaan Huygens, 14 апреля 1629, Гаага — 8 июля 1695, там же) — голландский математик, физик, астроном и изобретатель [5].
Первые работы Гюйгенса посвящены классическим проблемам: теоремам о квадратуре гиперболы, эллипса и круга, величине круга. Используя алгебраический подход, он уточнил значение числа π. В 1657 написал трактат О расчетах при азартных играх (De ratiociniis in ludo aleae) — одну из первых работ по теории вероятностей. Гюйгенс получил известность благодаря изобретению маятниковых часов. Об этом открытии он сообщил в сочинении «Часы» (Horologium, 1658).

Рис.1.8. Один из основоположников теории вероятностей

Нельзя не отметить вклад в науку, в том числе и прикладную, «короля математиков» Карла Фридриха Гаусса, так его назвали советские ученые А.Н. Колмагоров А.Н. и А.П. Юшкевич в работе «Математика XIX века» [8]. Это один из немногих математиков, который непосредственно занимался геодезией (см. рис.1.9).



Гаусс Карл Фридрих (30.4.1777, Брауншвейг, — 23.2.1855, Гёттинген), немецкий математик, внёсший фундаментальный вклад также в астрономию и геодезию. Родился в семье водопроводчика. С 1795 по 1798 учился в Гёттингенском университете. В 1799 получил доцентуру в Брауншвейге, в 1807 — кафедру математики и астрономии в Гёттингенском университете, с которой была также связана должность директора Гёттингенской астрономической обсерватории. На этом посту он оставался до конца жизни. Отличительными чертами творчества Гаусса являются глубокая органическая связь в его исследованиях между теоретической и прикладной математикой, необычайная широта проблематики. Работы Г. оказали большое влияние на развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, целых отраслей теоретической астрономии.

Рис.1.9. «Король математиков»

В период с 1820 по 1830 годы занимается геодезической съемкой Ганноверского королевства и составлением его подробной карты. Он не только проделывает огромную организационную работу и руководит измерением длины дуги меридиана от Геттингена до Альтоны, но и создает основы «высшей геодезии», занимающейся описанием действительной формы земной поверхности. По результатам практических геодезических работ и теоретических исследований в этой области К. Гаусс пишет работу «Исследования о предметах высшей геодезии».

Изучение формы земной поверхности потребовало от него углубленного изучения общего геометрического метода для исследования поверхностей. Выдвинутые К.Гауссом в этой области идеи сформулированы в сочинении «Общие изыскания о кривых поверхностях» (1827). Основная мысль этого сочинения заключается в том, что при изучении поверхности как бесконечно тонкой гибкой плёнки основное значение имеет не уравнение поверхности в декартовых координатах, а дифференциальная квадратичная форма, через которую выражается квадрат элемента длины и инвариантами которой являются все собственные свойства поверхности — прежде всего её кривизна в каждой точке. Другими словами, К.Гаусс предложил рассматривать те свойства поверхности (так называемые - внутренние), которые не зависят от изгибаний поверхности, не изменяющих длин линий на ней. Созданная таким образом внутренняя геометрия поверхностей послужила образцом для создания n-терной римановой геометрии [9, 10].

Огромное значение не только для геодезии, но и для всех наук, в основе которых лежит обработка наблюдений, имеют разработанные К.Гауссом методы получения наиболее вероятных значений измеряемых величин. Особенно широкую известность получил созданный К.Гауссом в 1821-23 гг. метод наименьших квадратов. К.Гауссом заложены также и основы теории ошибок.

Таким образом, рассмотрения роль математики в формировании естественнонаучных знаний в эпоху Возрождения можно утверждать, что полученные в этот период научные результаты в области математики лежат в основе современных методов обработки геодезических измерений и представление их в базах данных автоматизированных картографических и геоинформационных системах.

2.2. Физические величины

Под физической величиной понимают свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам, но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта. В геодезии под физической величиной, подлежащей измерению в процессе геодезических работ, понимают например, горизонтальные направления и угля, расстояния, площади, приращение координат и т.д.

Конкретное количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующее понятию «физическая величина», называют **размером физической величины**. Оценка размера физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц называется **значением физической величины.** Например, значение превышения между точками А и В равно - 12.63 м.

Значение физической величины, которое идеальным образом отражало бы соответствующее свойство объекта, называется **истинным значением физической величины**. Так, истинное значение суммы углов плоского треугольника равно 180 градусов. Заметим, что в большинстве случаев практики истинное значение величины остается неизвестным. Значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько приближающееся к истинному значению, что в данном конкретном случае практики может быть принято вместо него, называют **действительным значением физической величины**.

В геодезии значение физической величины, которое в данных условиях измерений является *наиболее близким по вероятности* к истинному значению, называют **вероятнейшим значением**.

2.3. Измерения их классификация и свойства

Измерением называют нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. Схематично процесс измерений показан на рис.1.10. Здесь показаны основные элементы процесса геодезических измерений. В основе рассматриваемого процесса лежит объект геодезического измерения, под которым понимают предметы материального мира (местность, сооружения, производственные помещения и т.д.), которые характеризуются одной или несколькими геодезическими величинами, подлежащими измерениям.

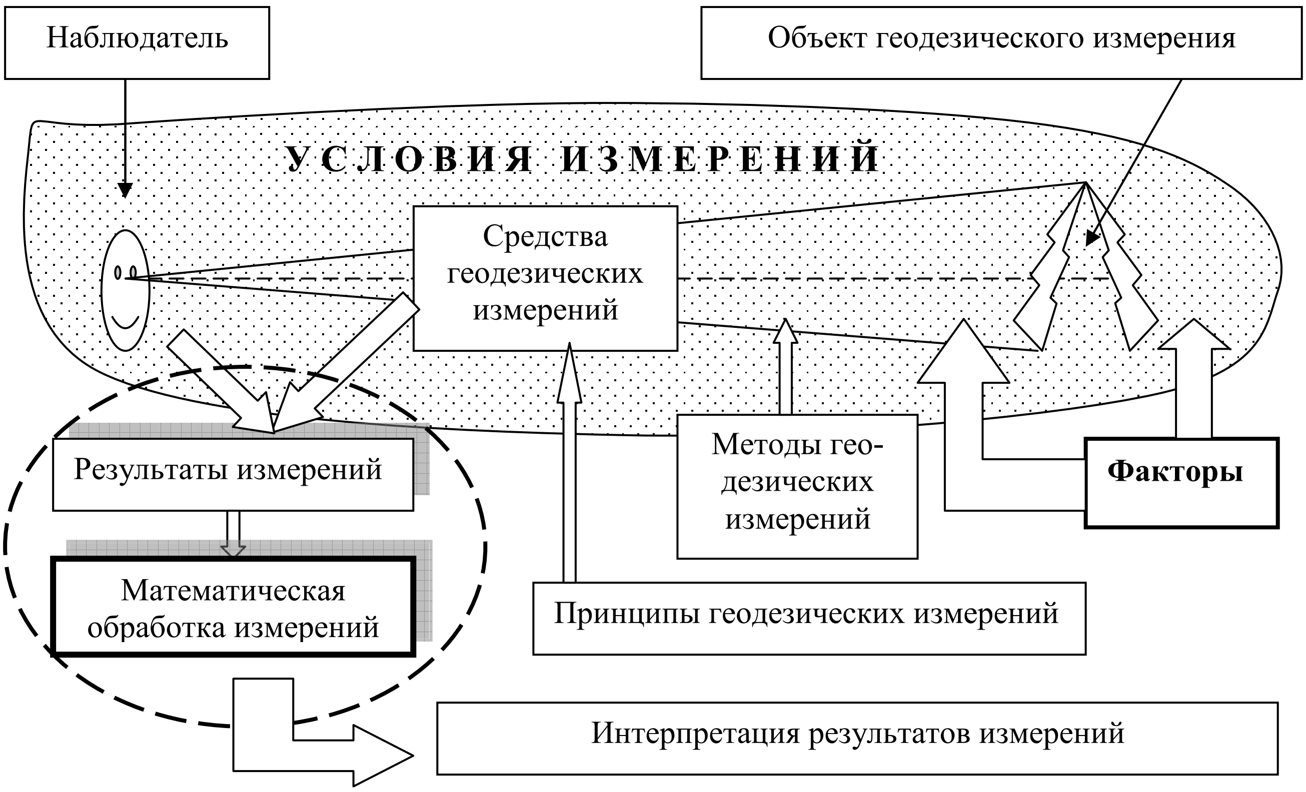


Рис.1.10. Обобщенная схема геодезических измерений

Наблюдатель, исходя из условий измерений, выбирает средства и методы геодезических измерений для получения необходимых результатов.

Условия проведения геодезических измерений определяются исходя из множества *факторов* внешней среды, влияющих на процесс измерений. К ним относятся климатические, механические, электромагнитные, световые, шумовые и др., проявляющиеся на рабочем месте во время проведения геодезических измерений. Кроме того, важным фактором, оказывающим влияние на измерение, является психофизиологическое состояние наблюдателя и его профессиональная выучка.

Условия геодезических измерений принято считать одинаковыми, если:

- измерялись физические объекты одного и того же рода;
- измерения выполнялись исполнителями одинаковой квалификации;
- измерения производились одинаковыми по качеству приборами;
- применялся один и тот же метод измерений;

- состояние внешней среды в процессе измерений изменялось в одинаковых пределах.

Если измерения выполнены в одинаковых условиях, их результаты считают *равноточными*. Несоблюдение хотя бы одного из перечисленных выше условий делает результаты *неравноточными*.

Выбор средств геодезических измерений и изучение их технических характеристик является предметом изучения геодезии, поэтому кратко напомним, что в средствах геодезических измерений (геодезических приборах) реализуются различные физические явления: оптический, оптико-механический, оптико - электронный, электромагнитный, импульсный, фазовый, спутниковый, доплеровский, интерференционный и др.

Более детально рассмотрим методы геодезических измерений, под которыми будем понимать совокупность операций (правил, приемов) по выполнению геодезических измерений в соответствии с реализуемым принципом измерений, выполнение которых обеспечивает получение результатов с заданной точностью. В геодезии различают следующие методы измерений:

- метод прямых геодезических измерений, при котором значение измеряемой геодезической величины получают непосредственно;
- метод косвенных геодезических измерений, при котором значение геодезической величины определяют как функцию других величин, полученных непосредственно;
- метод измерений во всех комбинациях (комбинированный метод), заключается в наблюдении не только геодезических величин, расположенных между смежными пунктами, но и их различных сочетаний (комбинаций);
- метод приемов, заключается в неоднократных определениях одной и той же геодезической величины по единой методике.
- метод круговых приемов, заключается в измерении углов путем последовательного наблюдения визирных целей, расположенных по кругу с повторным наблюдением первого (начального) направления;

- метод двойных измерений, заключается в исполнении однородных геодезических измерений сериями, состоящими из двух приемов (наблюдений);
- метод повторений (метод реитераций), заключается в определении n-кратного значения измеряемой геодезической величины и последующем вычислении искомого значения;
- метод измерений "вперед", заключается в наблюдении точки передней по ходу;
- метод измерений "из середины", заключается в последовательном наблюдении смежных пунктов (точек) прокладываемого хода с помощью прибора, расположенного между ними;
- метод измерений "через точку", выполняется при установки прибора либо на четных, либо на нечетных пунктах хода;
- многоштативный метод измерений, заключается в ослаблении погрешностей центрирования путем установки одновременно на нескольких смежных пунктах сети штативов с подставками для размещения в них визирных целей или прибора. Наибольшее распространение на практике получил трехштативный метод измерений.

Измерения также классифицируются на необходимые и дополнительные или избыточные. Их называют необходимыми, если они дают *только один результат* прямого измерения, косвенного измерения или *только одно значение* функции измеренных величин.

Примерами необходимых измерений являются: однократное измерение длины линии мерной лентой или дальномером, измерение горизонтального угла теодолитом одним полуприемом, определение тахеометром превышения со станции на реечный пикет, определение координат точки засечкой по двум измеренным углам, n-1 измеренных линий и углов в теодолитном ходе из n точек.

Необходимые измерения невозможно проконтролировать, поэтому нет возможности судить об их качестве.

Все измерения, выполненные сверхнеобходимых, которые позволяют получить два и более результата или два и более значения функции, называют избыточными.

Избыточные измерения дают возможность:

- осуществить контроль измерений;
- оценить точность выполненных измерений;
- получить такие приближенные значения измеренных величин, которые в общем случае оказываются ближе к истинному значению, чем отдельно взятый результат необходимого измерения.

На процесс измерения, как правило, оказывают взаимодействующие между собой следующие факторы:

- специфика объекта измерения;
- психофизиологическое состояние и квалификация субъекта измерения, т.е. исполнителя;
- особенности мерного прибора, при помощи которого исполнитель осуществляет измерение;
- особенности метода измерения, определяющего измерительный процесс;
- специфика внешней среды, в которой протекает процесс измерения.

Предметом изучения данного учебного материала являются результаты измерений и их математическая обработка. На рис.1.10 этот предмет выделен пунктирной линией.

Значение физической величины, найденной путем ее измерения, называют **результатом измерения**. Результат измерения в общем виде можно представить формулой:

$$l = n l_0, \tag{1.1}$$

где l — результат измерения, l_0 — значение единицы измерения, n — число единиц измерения.

По физическому исполнению различают прямые или непосредственные измерения, когда искомая величина непосредственно сравнивается с единицей измерения, и косвенные, когда значение измеряемой величины получается как функция одного или нескольких аргументов измеренных непосредственно или косвенно [11].

Примерами непосредственных измерений можно считать измерение температуры термометром, измерение массы тела на равноплечных весах путем сравнения ее с массой гирь, измерение длины линии мерной линейкой.

Примером косвенных измерений можно считать измерение длины линии нитяным дальномером и вычислении ее по формуле

$$D = kl + C, \tag{1.2}$$

где длина линии D определяется как функция непосредственно измеренного отрезка рейки l, заключенного между дальномерными штрихами, и параметров дальномера — коэффициента k; постоянного слагаемого C.

Другим примером косвенных измерений можно считать измерение превышения тригонометрическим нивелированием по формуле

$$h = \tfrac{1}{2} D \sin 2\nu + I - V, \tag{1.3}$$

где превышение h определяется как функция косвенно измеренных дальномерных расстояний D, угла наклона ν и непосредственно измеренных высоты прибора I и точки визирования V.

Заключительной процедурой в процессе геодезических измерений является **математическая обработка** полученных результатов. Эта процедура получения результатов геодезических измерений и оценки их точности путем проведения вычислительных операций с измеренными значениями геодезических величин по определенному алгоритму. В основе математической обработки геодезических измерений лежат математические методы и модели теории вероятностей, математической статистики и теории ошибок (погрешностей).

2.4. Погрешности измерений и их классификация

Погрешность измерений определяют как оценку отклонения величины измеренного значения от ее истинного значения. Погрешность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения [12].

В зависимости от характера измеряемой величины для определения погрешности измерений используют различные методы.

Метод Корфельда, заключается в выборе доверительного интервала в пределах от минимального до максимального результата измерений, и погрешность Δx как половина разности между максимальным (x_{max}) и минимальным (x_{min})результатом измерения:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}. \tag{1.4}$$

Средняя квадратическая погрешность вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n-1}}. \tag{1.5}$$

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического вычисляется по формуле:

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n(n-1)}}. \tag{1.6}$$

В теории погрешностей выделяют следующие классы погрешностей: по форме представления погрешности, по причине их возникновения и по характеру проявления.

По форме представления погрешностей различают следующие погрешности.

Абсолютная погрешность - ΔX является оценкой абсолютной ошибки измерения. Величина этой погрешности зависит от способа ее вычисления, который, в свою очередь, определяется распределением случайной величины X_{meas}. При этом равенство $\Delta X = |X_{true} - X_{meas}|$, где X_{true} - истинное значение, а X_{meas}- измеренное значение, должно выполняться с некоторой вероятностью близкой к 1. Если случайная величина X_{meas}распределена по нормальному закону, то, обычно за абсолютную погрешность принимают среднеквадратичное отклонение. Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах измерения, что и сама величина.

Относительная погрешность – отношение абсолютной погрешности к тому значению, которое принимается за истинное значение и вычисляется по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta x}{X}. \qquad (1.7)$$

Относительная погрешность является безразмерной величиной, либо измеряется в процентах.

Приведенная погрешность – относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или части диапазона. Она вычисляется по формуле

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{X_n}, \qquad (1.8)$$

где X_n - нормированное значение, которое зависит от типа шкалы измерительного прибора и определяется по его градуировке:

- если шкала прибора односторонняя, т.е. нижний предел измерений равен нулю, то X_n определяется равным верхнему пределу измерений;

- если шкала прибора двухсторонняя, то нормирующее значение равно ширине диапазона измерений прибора.

Приведенная погрешность является безразмерной величиной и может измеряться в процентах.

По причине возникновения различают следующие погрешности.

Инструментальные (приборные погрешности)- те, которые определяются погрешностями применяемых средств измерений и вызываются несовершенством принципа действия, неточности градуировки шкалы и ее эргономичностью.

Методические погрешности – те, которые обусловлены несовершенством метода, а также упрощениями, положенными в основу методики измерений.

*Субъективные (операторные) погрешност*и – те, которые обусловленные степенью внимательности, сосредоточенности, подготовленности и другими психофизиологическими качествами человека, осуществляющего измерения.

В процессе измерений применяют приборы для измерения лишь с определенной заранее заданной точностью – основной погрешностью, допускаемой нормали в нормальных условиях эксплуатации для данного прибора. Если измерительный прибор используется в условиях отличных от нормальных условий, то возникает дополнительная погрешность, увеличивающая общую погрешность прибора. К дополнительным погрешностям относятся: температурная, вызванная отклонением температуры окружающей среды от нормальной, установочная, обусловленная отклонением положения прибора от нормального рабочего положения и т.д. За нормальную температуру окружающего воздуха принимают 20^0С, за нормальное атмосферное давление 101,325 кПа.

Обобщенной характеристикой средств измерения является класс точности, определяемый предельными значениями допускаемых основной и дополнительной погрешностью. Класс точности средств измерения характеризует их точностные свойства, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполняемых с помощью этих средств, так как точность зависит также от метода измерений и условий их выполнения.

По характеру проявления различают следующие погрешности.

Грубые погрешности или промахи, резко отклоняют результаты измерений от истинного значения. Всегда они возникают только по вине исполнителя (оператора). В теории погрешностей грубые погрешности не изучают. Их необходимо своевременно обнаруживать, а результаты измерений, содержащие эти погрешности, исключать из дальнейшей обработки. Наиболее действенными методами обнаружения грубых погрешностей являются методы избыточных измерений. Вот почему в геодезии каждую величину измеряют, как правило, не менее двух раз.

Систематические элементарные погрешности порождаются существенными связями между факторами, влияющими на измерения, и возникают каждый раз при одних и тех же условиях. Систематические погрешности подчинены какой-то в той или иной степени определенной закономерности. Эти закономерности поддаются изучению и при определенных условиях систематические погрешности могут быть исключены из отдельного результата измерений.

Случайные элементарные погрешности порождаются не существенными, а второстепенными случайными связями между факторами измерений, при определенных условиях измерений. Они могут появляться в процессе измерений, а могут и не появиться, могут быть большими или меньшими, положительными или отрицательными. Величина и знак этих погрешностей носит случайный характер, а их распределение подчинено законам теории вероятностей.

Случайные погрешности не могут быть исключены из отдельного результата измерения. Влияние их на результаты измерений можно лишь ослабить, повышая квалификацию исполнителя, совершенствуя измерительные приборы и методику измерений, выполняя измерения при более благоприятных условиях. Влияние случайных погрешностей можно также ослабить надлежащей математической обработкой результатов измерений.

Суммарное влияние элементарных систематических погрешностей образует систематическую погрешность θ результата измерения, а суммарное влияние элементарных случайных погрешностей – случайную погрешность Δ результата измерений.

Таким образом, погрешность измерения ε можно представить как сумму двух составляющих:

$$\varepsilon = \theta + \Delta . \qquad (1.9)$$

На практике при осуществлении геодезических измерений системные и случайные погрешности действуют совместно, поэтому их разделение в процессе обработки результатов измерений оказываются затруднительным. Более того, в некоторых случаях погрешности, случайные по происхождению, при определенных условиях становятся систематическими.

Пример. Погрешности измерения высот точек съемочной сети, полученных из геометрического или тригонометрического нивелирования, по своей природе являются случайными. Однако при тахометрической или мензульной съемке в данной конкретной ситуации эта погрешность постоянна по величине и знаку, а потому войдет в высоты реечных пикетов как систематическая.

2.5. Свойства случайных погрешностей

Рассматривая свойства случайных погрешностей, будем иметь в виду не их индивидуальные свойства, а наиболее общие интегральные свойства, которыми обладают достаточно большие совокупности этих погрешностей.

В теории погрешностей выделяют четыре таких свойства.

Свойство ограниченности. При данных условиях измерений случайная погрешность по абсолютной величине не может превзойти некоторого известного предела. Этот предел называется предельной погрешностью. Обозначив ее $\Delta_{\text{ïð}}$, данное свойство можно выразить неравенством

$$\left|\Delta\right| \le \Delta_{\text{ïð}} . \tag{1.10}$$

Свойство компенсации. Если ряд измерений одной или нескольких величин осуществляется в одних и тех же условиях, то сумма случайных погрешностей, деленная на их число, при неограниченном увеличении ряда измерений в пределе стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left[\Delta\right]}{n} = 0 . \tag{1.10}$$

В выражении (1.10) и в дальнейшем будем использовать символику К.Ф.Гаусса, где квадратные скобки означают сумму однородных величин. Например.

$$\left[\Delta\right] = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n ;$$

$$[\Delta^2] = \left[\Delta\Delta\right] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 ;$$

$$\left[a a\right] = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 ;$$

$$\left[a b\right] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n . \tag{1.11}$$

Свойство независимости. Если осуществляется два ряда измерений со случайными погрешностями: 1) $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$ и 2) $\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots, \Delta_n''$, то сумма попарных произведений этих погрешностей, деленная на число этих произведений, при неограниченном возрастании числа измерений в пределе стремится к нулю.

Используя символику К.Ф.Гаусса это свойство можно записать формулой:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}=0. \qquad (1.12)$$

Данное свойство не является всеобъемлющим. В геодезической практике встречается не часто, но встречаются зависимые случайные погрешности.

Свойство рассеивания. Если ряд измерений осуществляется в одних и тех же условиях, то для случайных погрешностей имеет место предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta^2]}{n}=\sigma^2. \qquad (1.13)$$

Величина σ называется стандартом. Квадрат стандарта σ^2 называют дисперсией, а величину

$$p=\frac{c}{\sigma^2}, \qquad (1.14)$$

где c – произвольное положительное число называют **весом**.

Из соотношений (1.13) и (1.14) следует: ряды измерений, выполненные с более высокой точностью, обладают меньшим стандартом и дисперсией и большим весом.

Дополнительные источники информации

2. http://ru.wikipedia.org/wiki/Галилей
3. Рене Декарт. Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках / http://psylib.org.ua/books/dekar01/
4. Математика. http://ru.wikipedia.org/wiki/Математика
5. Гюйгенс, Христиан. Энциклопедия «Кругосвет» http://slovari.yandex.ru/dict/krugosvet/article/3/35/1003945.htm
6. Блез Паскаль. http://ru.wikipedia.org/wiki/Паскаль,_Блез
7. Ньютон, Исаак http://ru.wikipedia.org/wiki/Ньютон,_Исаак
8. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. (ред.) Математика XIX века. М.: Наука.
9. Гаусс. Словари и энциклопедии. http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/159612/Гаусс.
10. Гаусс, Карл Фридрих. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/Гаусс,_Карл
11. Вайславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений: Учебно-методическое пособие

(для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии»). – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.

12. http://ru.wikipedia.org/wiki/ Погрешность измерения.