Содержательный модуль 2

Параметрический способ уравнивания геодезических построений

2.1. Постановка задачи. Уравнения поправок

Пусть для определения значений неизвестных x, y, z,…,t выполнены равноточные независимые измерения $L_1, L_2, \dots, L_n$. Общее число неизвестных t, общее число измерений n. При чем $n > t$. Эти условия свидетельствуют о том, что система уравнений, отражающая процесс измерений является переопределенной. В данном случае неизвестными могут быть координаты пунктов, высоты реперов и другие физические величины, значения которых необходимо определить, а измеряемыми величинами – горизонтальные направления, горизонтальные или вертикальные углы, длины линий, превышения и т.д. Естественно предположить, что между неизвестными x, y, z,…,t и измеряемыми величинами L_i, $i = \overline{1,n}$ существует некоторая зависимость, которую в обобщенном виде можно представить следующим математическим соотношением:

$$f_i(x, y, z, \dots, t) = L_i + V_i, \tag{2.1}$$

где V_i - поправки к измеренным значениям L_i, $i = \overline{1,n}$.

Детализируем соотношение (2.1) и запишем его в виде системы уравнений поправок:

$$\begin{gathered} f_1(x, y, z, \dots, t) = L_1 + V_1, \\ f_2(x, y, z, \dots, t) = L_2 + V_2, \\ \dots \\ f_n(x, y, z, \dots, t) = L_n + V_n. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Сведем полученную систему уравнений (2.2) к виду удобному для дифференцирования и удовлетворения условия (1.3), т.е условия минимизации поправок. Для этого введем некоторые приращения к неизвестным и обозначим их x_0, y_0, z_0,…, t_0, а так же к поправкам, которые обозначим δx ,δy,δz,…,δt. Тогда справедливо записать следующую систему уравнений:

$$x = x_0 + \delta x,$$
$$y = y_0 + \delta y,$$
$$z = z_0 + \delta z, \qquad (2.3)$$
$$\dots$$
$$t = t_0 + \delta t.$$

Подставим полученные соотношения (2.3) в систему уравнений (2.2) и запишем функцию в обобщенном виде:

$$f_i(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, \dots, t_0 + \delta t) - L_i = V_i \ . \qquad (2.4)$$

Для дальнейшего математического анализа полученного выражения воспользуемся процедурами разложения функции в ряд Тейлора. Напомним, что формула Тейлора применяются для аппроксимации функции многочленами, а линеаризация уравнений происходит путем разложения в ряд Тейлора и отсечения всех членов высшее первого порядка. Формула Тейлора и одна из теорем дифференциального исчисления для справки приведена в приложении А.

Предположим, что функции (2.4) являются такими, что их можно разложить в ряд Тейлора в окрестностях точек x_0, y_0, z_0,…,t_0. Поскольку приращения δx, δy, δz,…, δt, есть величины малые, то ограничиваясь линейными членами разложения получим:

$$f_i\left((x_0, y_0, \dots, t_0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right)\delta y + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_0}\right)\delta t\right) - L_i = V_i, \qquad (2.5)$$

где $i = \overline{1, n}$.

Обозначим:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right) = a_i; \ \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right) = b_i; \dots ; \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_0}\right) = q_i, \qquad (2.6)$$

С учетом ограничений и введенных обозначений, которые степенные члены ряда обращают в ничтожно малые величины можно записать:

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0) - L_i = l_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда систему уравнений (2.2) с учетом проделанных преобразований можно записать в линеаризованном виде:

$$a_1 \delta x + b_1 \delta y + \dots + q_1 \delta t + l_1 = V_1 \ ,$$

$$a_2\delta x + b_2\delta y + \cdots + q_2\delta t + l_2 = V_2\ ,$$
$$\ldots \qquad (2.7)$$
$$a_n\delta x + b_n\delta y + \cdots + q_n\delta t + l_n = V_n\ .$$

Таким образом, в полученных уравнениях неизвестными являются поправки V_i к измеренным значениям L_i, $i = \overline{1,n}$ и приращения поправок $\delta x, \delta y, \delta z,\ldots, \delta t$ к значениям параметров $x_0, y_0, z_0,\ldots,t_0$. Поэтому полученная система параметрических уравнений (2.7) является недоопределенной, так как количество неизвестных больше, чем количество уравнений, которое равно n.

2.2. Минимум $[V^2]$. Нормальные уравнения

На основе полученной в п.п. 2.1 системы уравнений (2.7), которая описывает линеаризованную систему поправок покажем процедуру ее нормализации. Для этого введем ограничение на число неизвестных в системе уравнений с целью уменьшения размерности решаемой задачи. Будем полагать, что число уравнений равно n, а число неизвестных равно 3. Тогда система уравнений (2.7) примет вид:

$$a_1\delta x + b_1\delta y + c_1\delta z + l_1 = V_1\ ,$$
$$a_2\delta x + b_2\delta y + c_2\delta z + l_2 = V_2\ ,$$
$$\ldots \qquad (2.8)$$
$$a_n\delta x + b_n\delta y + c_n\delta t + l_n = V_n\ .$$

Число избыточных измерений в данном случае равно $r = n - 3$ и поэтому система уравнений не имеет единственного решения.

Найдем для этой системы минимум $[V^2]$. Для этого выполним следующие преобразования. Сначала возведем в квадрат правые и левые части уравнений поправок (2.8), а затем результаты сложим. Результат запишем в символах К.Ф.Гаусса:

$$[V^2] = [aa]\delta x^2 + 2[ab]\delta x\delta y + 2[ac]\delta x\delta z + 2[al]\delta x + [bb]\delta y^2 +$$
$$+2[bc]\delta y\delta z + 2[bl]\delta y + [cc]\delta z^2 + 2[cl]\delta z + [ll]. \qquad (2.9)$$

Для нахождения локального экстремума полученной функции, т.е. $min[V^2]$ возьмем частные производные по неизвестным δx, δy, δz и приравняем их к нулю. Получим:

$$\frac{\partial[V^2]}{\partial\delta x} = 2[aa]\delta x + 2[ab]\delta y + 2[ac]\delta z + 2[al] = 0,$$
$$\frac{\partial[V^2]}{\partial\delta y} = 2[ab]\delta x + 2[bb]\delta y + 2[bc]\delta z + 2[bl] = 0,$$
$$\frac{\partial[V^2]}{\partial\delta z} = 2[ac]\delta x + 2[bc]\delta y + 2[cc]\delta z + 2[cl] = 0.$$

Сократим данные выражения на общий множитель 2 и получим систему нормальных уравнений, в которой число неизвестных равно числу уравнений:

$$\begin{gathered} [aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + [al] = 0, \\ [ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z + [bl] = 0, \\ [ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z + [cl] = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Такая система уравнений имеет единственное решение и поэтому ее принято называть системой нормальных уравнений.

В полученной системе уравнений коэффициенты при неизвестных, которые расположены по главной диагонали принято называть квадратичными. Особенностью полученной системы уравнений является то, что коэффициенты главной диагонали всегда положительные, а коэффициенты при неизвестных, расположенные симметрично относительно главной диагонали, попарно равны между собой, т.е. система уравнений (2.10) симметрична. Решив эту систему, находим неизвестные δx, δy, δz. Подставив полученные значения неизвестных в систему уравнений (2.8) можно найти значения поправок.

Таким образом, выше показана процедура преобразования системы линеаризованных уравнений, которая не имеет единственного решения в систему нормальных уравнений имеющую единственное решение.

2.3. Матричное представление параметрического метода уравнивания. Решение нормальных уравнений

Известно, что системы линейных уравнений могут быть представлены и преобразованы с использованием математического аппарата линейной алгебры. Основные понятия и операции над матрицами приведены в приложении **Б**.

Используем пример системы параметрических линейных уравнений (2.8), приведенный в предыдущем подразделе и покажем их матричное представление и соответствующие операции над этими представлениями для решения нормальных уравнений.

Обозначим матрицу коэффициентов **A** размером $n \times t$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a}_\mathrm{n} & \mathrm{b}_\mathrm{n} & \mathrm{c}_\mathrm{n} \end{pmatrix},$$

матрицу-столбец Δ размером $t \times 1$ неизвестных поправок $\delta x,\ \delta y,\ \delta z, \dots, \delta t$, которая является вектором поправок к ближайшим значениям параметров x_0, y_0, $z_0,\dots,t_0$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \dots \\ \delta z \end{pmatrix},$$

матрицу-столбец **L** размером $n \times 1$ свободных членов или вектором свободных членов системы уравнений

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix},$$

и матрицу-столбец **V** размером $n \times 1$ или вектор поправок к результатам измерений

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Введя эти обозначения систему линейных уравнений (2.8) можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{a}_\mathrm{n} & \mathrm{b}_\mathrm{n} & \mathrm{c}_\mathrm{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \cdots \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_2 \end{pmatrix}$$

или в сокращенном виде

$$\boldsymbol{A} \cdot \Delta + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{V}\ \boldsymbol{.} \tag{2.11}$$

Исследуем полученное матичное уравнение. Для этого выполним операцию транспонирования матрицы **A** и каждый член уравнения (2.11) умножим на эту матрицу $\boldsymbol{A}^T$, получим:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \cdot \Delta + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{V}\boldsymbol{.} \tag{2.12}$$

Рассмотрим отдельно в полученном матричном уравнении произведения $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}$.

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{a}_2 \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{a}_\mathrm{n} & \mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{b}_2 \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{b}_\mathrm{n} & \mathrm{a}_1\mathrm{c}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{c}_2 \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{c}_\mathrm{n} \\ \mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{b}_2 \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{b}_\mathrm{n} & \mathrm{b}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2\mathrm{b}_2 \cdots + \mathrm{b}_\mathrm{n}\mathrm{b}_\mathrm{n} & \mathrm{b}_1\mathrm{c}_1 + \mathrm{b}_2\mathrm{c}_2 \cdots + \mathrm{b}_\mathrm{n}\mathrm{c}_\mathrm{n} \\ \mathrm{a}_1\mathrm{c}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{c}_2 \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{c}_\mathrm{n} & \mathrm{b}_1\mathrm{c}_1 + \mathrm{b}_2\mathrm{c}_2 \cdots + \mathrm{b}_\mathrm{n}\mathrm{c}_\mathrm{n} & \mathrm{c}_1\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{c}_2 \cdots + \mathrm{c}_\mathrm{n}\mathrm{c}_\mathrm{n} \end{pmatrix}.$$

Запишем каждый элемент полученной матрицы в символах К.Ф.Гаусса:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

т.е. получена матрица коэффициентов нормальных уравнений (2.10).

Рассмотрим произведение матриц $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_n l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [al] \\ [bl] \\ [cl] \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda}, \tag{2.14}$$

т.е. получена матрица-столбец свободных членов нормальных уравнений (2.10).

Найдем произведение матриц $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_n V_n \\ b_1 V_1 + b_2 V_2 + \cdots + b_n V_n \\ c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots + c_n V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [aV] \\ [bV] \\ [cV] \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}. \tag{2.15}$$

Здесь элементы матрицы **T** можно приравнять к нулю, т.е.

$$[aV] = 0, [bV] = 0 , [cV] = 0 , \tag{2.16}$$

так как принимая во внимание выражения (2.13) и (2.14) и сравнивая уравнение (2.12) в матричной форме с системой уравнений (2.10) приходим к выводу, что их левые части равны. Следовательно, их правые части тоже должны быть равны.

Принимая во внимание сделанные выше преобразования систему нормальных уравнений запишем в виде:

$$\boldsymbol{A} \cdot \Delta + \boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{2.17}$$

Учитывая, что матрица $\boldsymbol{A}$ является особой, т.к. ее определитель равен нулю, а между строками и столбцами существует линейная зависимость, то для решения матричного уравнения (2.17) необходимо и достаточно умножить его слева на матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$ обратную матрице $\boldsymbol{A}$. В результате получим матричное уравнение:

$$\Delta = -\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\lambda} . \tag{2.18}$$

Получена матрица-столбец Δ поправок к измеренным величинам **V**.

Приведенные выше математические преобразования дают основание записать строгую последовательность процедур, обеспечивающих уравнивание параметрическим способом с использованием исходных данных в виде матриц.

Процедура 1. Подготовка исходных данных для уравнивания.

Необходимо подсчитать количество определяемых неизвестных t, а также число независимых измерений n и определить число избыточных измерений $r = n - t$. Если $n = t$, $r = 0$, то задача уравнивания измеренных величин не возникает.

Процедура 2. Определение приближенных значений неизвестных x_0, y_0, z_0,…,t_0 с использованием только необходимых измерений.

Процедура 3. Составление уравнений поправок в общем виде (2.2) и их линеаризация (2.7).

В результате выполнения процедуры получаем коэффициенты уравнений поправок a, b, c,…,q.

Процедура 4. Вычисление свободных членов уравнений поправок по формулам (2.6).

Процедура 5. Составление уравнения поправок в матричной форме (2.11).

В результате выполнения процедуры составляются матрицы коэффициентов уравнений поправок $\boldsymbol{A}$ размером $(n \times t)$ и матрица-столбец свободных членов **L** размером $(n \times 1)$.

Процедура 6. Выполняется операция транспонирования матрицы $\boldsymbol{A}$.

Процедура 7. Умножение матричного уравнения (2.11) слева на матрицу $\boldsymbol{A^T}$.

В результате выполнения процедуры получаем систему нормальных уравнений (2.10) представленную в матричной форме (2.17).

Процедура 8. Выполняется операция обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений $\boldsymbol{A}$ и получение матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$. Размер матриц составляет $t \times t$.

Процедура 9. Умножение уравнения (2.17) слева на матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$.

В результате выполнения процедуры получаем матрицу-столбец поправок Δ размером $t \times 1$.

Процедура 10. Вычисляются по формулам (2.3) уравненные значения неизвестных x, y,…,t.

Процедура 11. Выполняется операция подстановки матрицы-столбца Δ в уравнение (2.11), а также умножения и суммирования матриц.

В результате выполнения процедуры получаем матрицу-столбец поправок к измеренным величинам $\boldsymbol{V}$ размером $\mathrm{n} \times 1$. Вычисляются уравненные значения $\boldsymbol{L_i} + \boldsymbol{V_i}$.

Процедура 12. Оценка точности полученных в результате уравнивания неизвестных величин x, y,…,t.

Таким образом, параметрический способ подразумевает вычисление поправок не к измеренным величинам, а к некоторым приближенным значениям (параметрам), т.е. к конечным результатам уравнения, которыми в геодезических сетях являются координаты или высоты пунктов, и непосредственное получение вероятнейших значений параметров, минуя вероятнейшее значение измеренных элементов сети.

Показано как на основе линейной алгебры, а именно матричных представлений, а также операций над ними можно решать нормальные уравнения описывающие процесс уравнивания геодезических измерений параметрическим способом.

Приведенная в конце подраздела строгая последовательность математических процедур обеспечивает оперативное решение практических задач уравнивания.

2.4. Оценка точности уравненных значений неизвестных геодезических измерений

Заключительной процедурой уравнивания геодезических измерений параметрическим способом, как это видно из предыдущего подраздела, является оценка точности уравненных значений неизвестных. Рассмотрим эту процедуру подробно. Как и в случае математической обработки одной величины оценим точность нескольких неизвестных, т.е. определить их среднеквадратические погрешности $m_x, m_y, \dots, m_t$. Решение данной задачи имеет некоторые особенности, заключающиеся в том, что поправки $\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \dots,\ \delta t,$ - величины зависимые. Причем математическому анализу подвергается не одна функция, а несколько.

Поскольку величины L_1, L_2,…,L_n (см. п.п. 2.1) измерены независимо и равноточно, их среднеквадратические погрешности равны:

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m.$$

Соответственно будут равны и их веса: $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$, а также среднеквадратические погрешности измерений m и среднеквадратическая погрешность единиц веса $\mu,\ m = \mu.$

Обратимся к уравнению (2.18) $\Delta = -\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\lambda}$, где элементы матриц Δ и λ являются переменными, а элементы обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ представляют собой непрерывные дифференцируемые функции (2.10) и в соответствии с основной теоремой теории погрешности (см. п.п.4.1) характеризуются стандартами данных функций. Тогда обратная матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ может быть представлена функциональным определителем матрицы Якоби (Якобианом), элементы которого, есть частные производные.

Запишем

$$\boldsymbol{A^{-1}} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial\delta_1}{\partial\lambda_1}(\lambda) & \frac{\partial\delta_1}{\partial\lambda_2}(\lambda) & \frac{\partial\delta_1}{\partial\lambda_3}(\lambda) \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial\lambda_1}(\lambda) & \frac{\partial\delta_2}{\partial\lambda_2}(\lambda) & \frac{\partial\delta_2}{\partial\lambda_3}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\delta_n}{\partial\lambda_1}(\lambda) & \frac{\partial\delta_n}{\partial\lambda_2}(\lambda) & \frac{\partial\delta_n}{\partial\lambda_3}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Подставим полученную матрицу (2.19), а также матрицы Δ и λ в выражение (2.18) и учитывая свойства операций над матрицами (см. приложение Б) получим следующее соотношение:

$$\boldsymbol{M_\delta^2} = m^2\{\boldsymbol{A^{-1}A^TA(A^T)^{-1}}\} = m^2(\boldsymbol{A^T})^{-1}.$$

Упрощая полученную формулу будем иметь:

$$\boldsymbol{M_\delta^2} = m^2\boldsymbol{A^{-1}}. \tag{2.20}$$

Получена и записана в матричном виде формула для расчета среднеквадратической погрешности совокупности поправок при условии равноточных измерений и независимости поправок $\delta x,\ \delta y,\ \delta z, \ldots, \delta t$.

Для вычисления точности уравненных значений неизвестных в случае их зависимости проделаем следующие процедуры. Учитывая, что матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ симметричная заменим в ней *диагональные* элементы на весовые коэффициенты, величины которых равны обратным весам неизвестных

$$Q_{ij} = \frac{1}{P_{ij}},\ \ (i = j).$$

Заметим, что диагональные элементы формируемой матрицы $\mathbf{Q}$ всегда положительны. Не диагональные элементы $Q_{ij},\ (i \neq j)$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Они представляют собой корреляционные моменты, обусловленные зависимостью определенных неизвестных. Например, элемент Q_{12} и равный ему элемент Q_{21} следует рассматривать как корреляционный момент, обусловленный зависимостью величин x и y, т.е. $Q_{12} = Q_{21} = Q_{xy}$.

Положительное значение Q_{xy} свидетельствует о том, что увеличение или уменьшение погрешности m_x неизбежно приводит к увеличению или уменьшению величины m_y. И, наоборот, отрицательное значение Q_{xy} свидетельствует о том, что увеличение m_x влечет приводит к уменьшению m_y, а уменьшение m_x к увеличению m_y.

Тогда справедливо записать, что $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{Q},$ и $\boldsymbol{M_\delta^2} = m^2\boldsymbol{Q}.$ В развернутом виде формула (2.20) примет вид:

$$\boldsymbol{M_\delta^2} = m^2 \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots Q_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \cdots Q_{tt} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Отсюда следует, что квадрат среднеквадратической погрешности совокупности неизвестных $x,\ y,\ z,\ \ldots,t$ является матрицей, которая получена умножением квадрата среднеквадратической погрешности m измеренных величин $L_i,\ i = \overline{1,n}$ на матрицу **Q**.

При вычислении среднеквадратических погрешностей неизвестных $x,\ y,$ $z,\ \ldots,t$ будем учитывать, что веса функций результатов измерений связаны со стандартом и стандартом единицы веса соотношением (см. 6.8 модуль 1). Тогда справедливо записать следующие соотношения:

$$m_x = m\sqrt{Q_{11}},\ \ m_y = m\sqrt{Q_{22}},\ldots,m_t = m\sqrt{Q_{tt}}. \tag{2.22}$$

Из проведенного анализа следует, что хотя величины $L_i,\ i = \overline{1,n}$ измерены равноточно и независимо, полученные в результате уравнивания значения независимых величин $x,\ y,\ z,\ \ldots,t$ являются неравноточными и зависимыми величинами.

Пример 2.1.

Если определяемыми неизвестными являются координаты $x,\ y$ пунктов геодезической сети, то совокупная погрешность положения пункта в данной системе координат в соответствии с выражением (2.21) характеризуется матрицей:

$$\boldsymbol{M^2} = m^2 \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Полученная формула дает возможность рассчитать следующие точностные характеристики положения точки на плоскости:

1. Среднеквадратическую погрешность по осям координат m_x и m_y, вычисляемые по формулам (2.22). Они зависят от выбора системы координат (см. рис. 2.1).

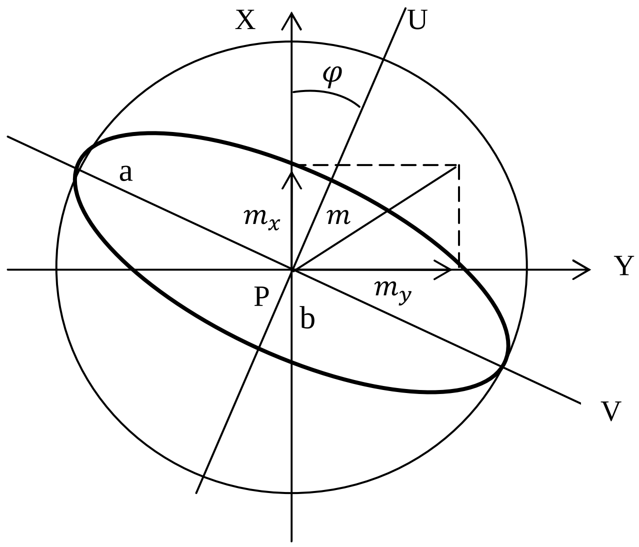

Рис. 2.1. Иллюстрация к примеру 2.1

2. Круговую среднеквадратическую погрешность, вычисляемая по формуле:

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \tag{2.24}$$

которая нашла широкое применение в геодезической практике, при этом исходя из предположения, что рассеивание измерений по осям X и Y имеет одинаковую вероятность.

3. Эллипс погрешностей, ориентация и размеры осей которого определяют наиболее вероятные направления и величину максимальной и минимальной среднеквадратической погрешности положения геодезического пункта.

Для определения совокупной погрешности положения геодезического пункта воспользуемся соотношением (2.23) и рис.2.1, где показано, что поворотом осей вокруг точки P можно подобрать такую систему координат UV, при которой недиагональные элементы матрицы **Q** будут равны нулю и рассматриваемое выражение примет вид:

$$\boldsymbol{M^2} = m^2 \begin{pmatrix} Q_{uu} & 0 \\ 0 & Q_{vv} \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Необходимый для такого преобразования угол поворота осей вычисляется по формуле:

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\mathrm{Q_{xy}}}{\mathrm{Q_{xx}} - \mathrm{Q_{yy}}}\,, \tag{2.26}$$

а элементы $\mathrm{Q_{uu}}, \mathrm{Q_{vv}}$ на основе уравнений:

$$Q_{uu}, Q_{vv} = \frac{1}{2}\left\{Q_{xx} + Q_{yy} \pm \sqrt{\left(Q_{xx} - Q_{yy}\right)^2 + 4Q_{xy}^2}\right\}.$$

Большая и малая полуоси эллипса погрешностей будет соответственно равны:

$$a = m\sqrt{Q_{uu}},\ b = m\sqrt{Q_{vv}}. \tag{2.27}$$

Таким образом, подробно рассмотрена процедура (см. п.п.2.3 процедура 12,) оценивания точности уравненных значений неизвестных. На примере демонстрируется последовательность вычисления точностных характеристик.

2.5. Вычисление эмпирической среднеквадратической погрешности по поправкам, полученным из уравнивания

Как правило, измеренные величины L_i определены при условии

$$[V^2] = min,$$

то есть имеются основание предполагать, что на их основании можно получить состоятельную и несмещенную оценку среднеквадратической погрешности m. Однако на основании этого же условия и здравого смысла можно утверждать, что сумма квадратов истинных погрешностей всегда будет больше сумме квадратов полученных поправок. Тогда справедливо неравенство $[\Delta^2] > [V^2]$, где Δ - истинные погрешности. Разделив это неравенство на n, получим

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} > \frac{[V^2]}{n}.$$

Следовательно, величина $\frac{[V^2]}{n}$ будет состоятельной, но смещенной оценкой m. Для того, чтобы она оказалась несмещенной, необходимо знаменатель правой части уменьшить на некоторую, пока неизвестную величину u.

Тогда справедливо записать эмпирическую среднеквадратическую погрешность в следующем виде:

$$m^2 = \frac{[V^2]}{n-u}. \tag{2.28}$$

В данном случае, задача сводится к определению неизвестной величины u.

Проанализируем выражение (2.28) и прежде всего, отметим, что общее число измерений n не может быть меньше числа необходимых измерений, т.е. $n \geq t$. Отсюда следует, что u не может быть больше t, так как при $n = t$ знаменатель в формуле (2.28) будет равен нулю. Следовательно, $u \leq t$.

Сделаем предположение, что $u < t$. При $n = t$ задача уравнивания не возникает, поправки $V_1 = 0$, $V_2 = 0$,…, $V_t = 0$, следовательно и $[V^2] = 0$ и $m = 0$, что противоречит здравому смыслу, так как $m > 0$. Отсюда следует, что u не может быть меньше t. Из проведенного анализа следует, что $u = t$.

Это дает основание формулу (2.28) записать в виде:

$$m^2 = \frac{[V^2]}{n-t}, \tag{2.29}$$

Приведенное доказательство равенства (2.29) основано на допущениях и эвристических рассуждениях поэтому не является строгим. Существует и строгое доказательство, которое является громоздким и в настоящем курсе не рассматривается.

Так как эмпирическая среднеквадратическая погрешность m чаще всего определяется из небольшого количества измерений, ее надежность определяет среднеквадратическая погрешность, которая вычисляется по формуле:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-t)}}\,. \tag{2.30}$$

Таким образом, на основе условий минимизации суммы квадратов поправок рассмотрен приближенный способ оценивания их точности по результатам уравнивания.

2.6. Среднеквадратическая погрешность измеренных величин после уравнивания

В предыдущем подразделе найдено формульное соотношение (2.28), которое позволяет оценить значение среднеквадратической погрешности m измеренных величин до уравнивания. Возникает справедливый вопрос. Изменится ли эта величина после уравнивания?

Чтобы ответить на этот вопрос приведем доказательство теоремы известное из теории погрешностей.

Теорема 2.1. Среднее значение отношения квадрата среднеквадратической погрешности после уравнивания к квадрату среднеквадратической погрешности до уравнивания, т.е. ее среднее уменьшение, обусловленное уравниванием системы измеренных величин способом наименьших квадратов, равно отношению числа необходимых измерений к числу всех измерений, т.е.

$$\frac{m_{\text{ур}}^2}{m^2} = \frac{t}{n} = q, \tag{2.31}$$

где $m_{\text{ур}}^2$ – среднеквадратическая погрешность измеренных величин после уравнивания, t – число необходимых измерений, n – число всех измерений

Доказательство.

Для удобства и простоты доказательства теоремы введем ограничение на количество неизвестных. Будем полагать, что система линеаризованных уравнений поправок (2.7) содержит три неизвестных и n уравнений. Тогда в матричном виде систему уравнений поправок можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{c}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{a}_\mathrm{n} & \mathrm{b}_\mathrm{n} & \mathrm{c}_\mathrm{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 + V_1 \\ l_2 + V_2 \\ \cdots \\ l_n + V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1' \\ l_2' \\ \cdots \\ l_n' \end{pmatrix}, \qquad (2.32)$$

где l_i', $i = \overline{1,n}$ – уравненные значения свободных членов.

Представим отношение (2.31) в виде:

$$q = \frac{\frac{m_1^2}{m^2} + \frac{m_2^2}{m^2} + \cdots + \frac{m_n^2}{n^2}}{n}, \qquad (2.33)$$

где $m_{\text{ур}}^2 = \frac{m_1^2}{m^2} + \frac{m_2^2}{m^2} + \cdots + \frac{m_n^2}{n^2}$.

Значения l' - функции поправок $\delta x, \delta y, \delta z$. Найдем формульные соотношения слагаемых $\frac{m_1^2}{m^2}, \frac{m_2^2}{m^2}, \cdots \frac{m_n^2}{n^2}$ формулы (2.33). Для этого продифференцируем исходные уравнения поправок (2.7) по переменным $\delta x, \delta y, \delta z$ и учитывая результаты доказательства основной теоремы погрешностей и ранее полученные формулы (2.19) и (2.20) представим среднеквадратические погрешности в виде произведения Якобианов

$$m_i^2 = m^2 \left\{ \frac{\partial l_i'}{\partial \delta x, \partial \delta y, \partial \delta z} \boldsymbol{M}_\delta^2 \left(\frac{\partial l_i'}{\partial \delta x, \partial \delta y, \partial \delta z} \right)^T \right\}. \qquad (2.34)$$

Разделим правую и левую часть полученного уравнения на m^2 и произведем необходимые операции с Якобианами. Кроме того учитывая равноточность измерений получим:

$$\frac{m_1^2}{m^2} = (a_1 \quad b_1 \quad c_1) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 a_1 Q_{11} + a_1 b_1 Q_{21} + a_1 c_1 Q_{31} + a_1 b_1 Q_{12} + b_1 b_1 Q_{22} + b_1 c_1 Q_{32} +$$

$$+a_1c_1Q_{13} + b_1c_1Q_{23} + c_1c_1Q_{33}. \qquad (\mathbf{a})$$

Аналогично , для $\frac{m_2^2}{m^2}$, $\cdots$ $\frac{m_n^2}{n^2}$ получим

$$\frac{m_2^2}{m^2} = a_2a_2Q_{11} + a_2b_2Q_{21} + a_2c_2Q_{31} + a_2b_2Q_{12} + b_2b_2Q_{22} + b_2c_2Q_{32} +$$

$$+a_2c_2Q_{13} + b_2c_2Q_{23} + c_2c_2Q_{33}, \qquad (\mathbf{b})$$

$$\frac{m_3^2}{m^2} = a_3a_3Q_{11} + a_3b_3Q_{21} + a_3c_3Q_{31} + a_3b_3Q_{12} + b_3b_3Q_{22} + b_3c_3Q_{32} +$$

$$+a_3c_3Q_{13} + b_3c_3Q_{23} + c_3c_3Q_{33}, \qquad (\mathbf{c})$$

$$\cdots$$

$$\frac{m_n^2}{m^2} = a_na_nQ_{11} + a_nb_nQ_{21} + a_nc_nQ_{31} + a_nb_nQ_{12} + b_nb_nQ_{22} + b_nc_nQ_{32} +$$

$$+a_nc_nQ_{13} + b_nc_nQ_{23} + c_nc_nQ_{33}. \qquad (\mathbf{d})$$

Подставляя (a), (b), (c) и (d) в формулу (2.33) просуммируем произведение a_i , b_i, c_i вынося за скобки весовые коэффициенты Q_{ij}. В результате найдем искомое значение

$$q = \frac{m^2}{m^2n}\{([aa]Q_{11} + [ab]Q_{21} + [ac]Q_{31}) + $$
$$+([ab]Q_{12} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{32}) + \qquad (2.35)$$
$$+([ac]Q_{13} + [bc]Q_{23} + [cc]Q_{33})\}.$$

Из свойств операций над матрицами в линейной алгебре известно, что

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{E},$$

где Е – единичная матрица, у которой диагональные элементы равны 1, а недиагональные – 0. В формуле (2.35) суммы произведений в круглых скобках, учитывая (2.13) и (2.21) представляют собой произведения i-й строки матрицы **A** на i-й столбец матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$**.** Следовательно, они соответствуют диагональным элементам матрицы **E**, которые равны 1. Тогда на основании (2.31), (2.33) и (2.35) можно записать:

$$q = \frac{m_{\text{ур}}^2}{m^2n} = \frac{1+1+1}{n} = \frac{3}{n}.$$

При трех неизвестных $t = 3$ и распространяя полученное равенство на любое число неизвестных, окончательно получим:

$$q = \frac{m_{\text{ур}}^2}{m^2} = \frac{t}{n}\,, \tag{2.36}$$

что и требовалось доказать (см. формулу 2.31).

Таким образом, уравнивание методом наименьших квадратов повышает в среднем точность результатов измерений.

2.7.Уравнивание и оценка точности при неравноточных измерениях

В предыдущем подразделе рассматривалась оценка точности только равноточных измерений. Известно, что в случае неравноточных измерений точность измеренных величин $L_1, L_2, \dots, L_n$ характеризуется весами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Следовательно, и свободные члены в уравнениях поправок

$$l_i = f_i(x_0, y_0, \dots, t_0) - L_i,$$

являющиеся функциями измеренных величин, будут также иметь веса p_i.

Уравнивание результатов измерений будем производить с учетом условий: $[pV^2] = \min$. Рассмотрим некоторую функцию $l' = l\sqrt{p_i}$. Согласно утверждений, сделанных в п.п. 6.2 модуля 1 вес этой функции можно приравнять к 1

$$\frac{1}{p_{l'}} = \frac{1}{p_l}\left(\sqrt{p_l}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, так как $p_{l'} = 1$ в случае неравноточные измерения можно свети к равноточным. Для этого достаточно каждое уравнение системы поправок умножить на $\sqrt{p_i}$, т.е. в обобщенном виде систему линейных уравнений поправок можно записать в виде:

$$a_i\delta x\left(\sqrt{p_i}\right) + b_i\delta y\left(\sqrt{p_i}\right) + c_i\delta z\left(\sqrt{p_i}\right) + l_i\left(\sqrt{p_i}\right) = V_i\left(\sqrt{p_i}\right),\ i = \overline{1,n}\ .$$

Запишем эту систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \cdots \\ \delta z \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\mathrm{p}_1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathrm{p}_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \sqrt{\mathrm{p}_\mathrm{n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\boldsymbol{p_i}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \Delta + \sqrt{\boldsymbol{p_i}} \cdot \boldsymbol{L} = \sqrt{\boldsymbol{p_i}} \cdot \boldsymbol{V}. \qquad (2.37)$$

С целью освобождения от знака радикала, а также преобразования формулы (2.37) к виду нормальных уравнений умножим ее правую и левую части на произведение $\sqrt{\boldsymbol{p_i}} \cdot \boldsymbol{A^T}$. Получим:

$$\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \Delta + \boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{V}, \qquad (2.38)$$

где $\boldsymbol{P} = \sqrt{\boldsymbol{p_i}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{p_i}} = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & p_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix}$.

Упростим формулу (3.38). Для этого обозначим матрицу коэффициентов нормальных уравнений:

$$\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pba] & [pcc] \end{pmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{A}}. \qquad (2.39)$$

Вектор –столбец свободных членов нормальных уравнений обозначим:

$$\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ [pcl] \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}. \qquad (2.40)$$

Для соблюдения условий построения нормальных уравнений вектор – столбец $\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{V}$ приравняем к нулю. Получим:

$$\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} [paV] \\ [pbV] \\ [pcV] \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.41)$$

С введенными обозначениями система нормальных уравнений примет вид:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \cdot \Delta + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0. \qquad (2.42)$$

Полученное матричное уравнение как и в случае равноточных измерений, решается путем умножения ее слева на обратную матрицу $\widetilde{\boldsymbol{A^{-1}}}$

$$\Delta = \widetilde{\boldsymbol{A^{-1}}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\lambda}}. \qquad (2.43)$$

При неравноточных измерениях аналогично решается и задача оценки точности неизвестных $\delta x, \delta y, \ldots, \delta t$ с использованием формулы

$$\boldsymbol{M_{\delta}^{2}} = \mu^2 \cdot \widetilde{\boldsymbol{A^{-1}}}.$$

Эмпирическая среднеквадратическая погрешность единицы веса вычисляется по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-t}}. \tag{2.44}$$

Таким образом, видно, что уравнивание неравноточных измерений принципиально не отличается от уравнивания равноточных.

2.8. Примеры составления уравнений поправок для различных видов геодезических измерений и сетей

Пример уравнивания измерений при построении геодезической сети методом триангуляции

Принято считать, что метод триангуляции изобрел и впервые применил голландский астроном и математик, профессор Лейденского университета Снеллиус Виллеброд в 1615–17 гг.

Для геодезических построений, в настоящее время используется следующее определение термину «триангуляция».

Определение 2.1.

Триангуляцией называют метод определения положения геодезических пунктов построением на местности систем смежено расположенных треугольников, в которых измеряют длину одной стороны (по базису) и углы, а длины других сторон получают путем тригонометрических вычислений. Он является основным методом создания опорной геодезической сети и угловых измерений.

Данный метод состоит в построении сетей примыкающих друг к другу треугольников и в определении положения их вершин в избранной системе координат. В каждом треугольнике измеряют все три угла, а одну из сторон определяют из вычислений путем последовательного решения предыдущих треугольников. Решение треугольников начиная от его стороны, которая получена методом измерений. Такая сторона треугольника называется **базисной** стороной триангуляции. Как правило, в сетях триангуляции для контроля и повышения точности измеряют большее число базисов или базисных сторон, чем это минимально необходимо.

Рассмотрим пример нахождения на местности координат точек **Е** и **Ж** при условии, что известны координаты пунктов **И** и **Л**. Методом триангуляции необходимо найти координаты этих точек, которые максимально соответствуют их истинным значениям. Основной процедурой метода триангуляции в данном случае является измерение углов и их уравнивание. Изобразим графически геодезический четырехугольник (см. рис.2.2).

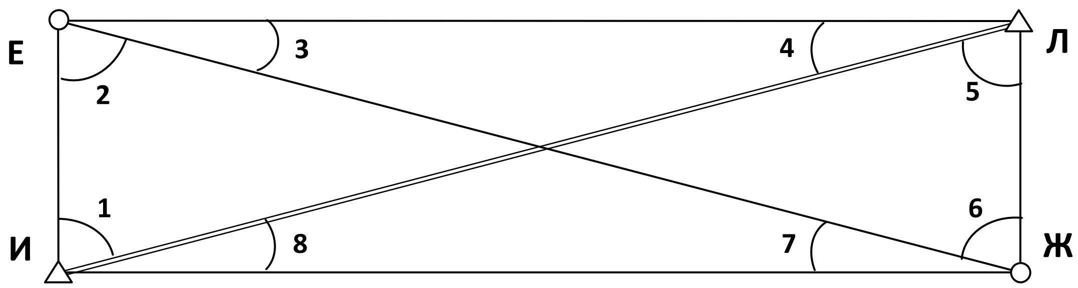

Рис. 2.2. Геодезический четырехугольник

Сведем в таблицу 2.1 следующие значения:

- исходные и уравненные координаты X, Y пунктов Л, И, Е и Ж;

- приближенные координаты X_0, Y_0 пунктов Е и Ж;

- поправки δx, [м], δy [м].

Для определения координат пунктов Е и Ж независимо и равноточно измерены углы, обозначенные на рис.2.2 цифрами от 1 до 8. Значение измеренных углов приведены табл. 2.2. Последовательность процедур уравнивания изложены в п.п.2.3.

Зададим число независимых измерений $n = 8$. Количество определяемых неизвестных $t = 2 \cdot 2 = 4$. Следовательно, число избыточных измерений составляет $r = 8 - 4 = 4$.

Таблица 2.1

Координаты пунктов

Наим. пункта	Приближенные координаты		Поправки		Исходные и уравненные координаты	
	X_0	Y_0	δx, м	δy, м	X	Y
Л	-	-	-	-	4618742,624	7221870,144
И	-	-	-	-	4615909,521	7218431,808
Е	4619045,068	7218073,227	-0,027	-0,006	4619045,041	7218073,221
Ж	7616056,864	7221513,215	0,015	0,009	4616056,879	7221513,224

Таблица 2.2.

Результаты измерений и уравнивания углов

№ угла	Свободные члены [с]	Углы, выч. по приближенным координатам	Измеренные углы	Поправки [с]	Уравненные углы
1	2	3	4	5	6
1	-0,01	57°02'10,75"	57°02'10,76''	0,61	57°02'11,37''

2	-0,22	42°29'46,43''	42°29'48,63''	-0,91	42°29'47,72''
3	1,04	36°25'31,78''	36°25'30,74''	0,61	36°25'31,35''
4	-0,01	44°02'31,03''	44°02'31,04	-1,48	44°02'29,56''
5	-0,03	42°56'32,11''	42°56'32,14''	0,53	42°56'32,67''
6	-2,34	56°35'25,07''	56°35'27,41''	-0,99	56°35'26,42''
7	2,05	43°43'02,58''	43°43'00,53''	1,13	43°43'01,66''
8	0,01	36°45'00,23''	36°45'00,22''	-0,98	36°44'59,24''

По измеренным углам вычислим приближенные координаты X_0, Y_0 определяемых точек Е и Ж. Для этого воспользуемся известными в геодезии формулами английского ученого Томаса Юнга (1773 – 1829 гг.), который предложил формулы для определения координат используя котангенсы углов треугольника.

Историческая справка.

Томас Юнг (1773 – 1829) – английский физик, врач, астроном и востоковед, один из создателей волновой теории света.

Обладая разносторонними способностями и интересами, Юнг уже в восемь лет занимался геодезией и математикой. Подростком знал латынь, древнегреческий, древнееврейский, итальянский и французский языки, изучал арабский язык, а также историю и ботанику. Изучал медицину в Кембридже. Занимался оптикой и акустикой.

В 21 год стал членом Лондонского королевского общества (1794), в 1802—1829 был его секретарём. В 1801—1803 был профессором Королевского института в Лондоне. С 1811 года до конца жизни работал врачом в больнице Святого Георгия в Лондоне. Одновременно с 1818 года секретарь Бюро долгот и редактор «Мореходного календаря».

Надпись на монументе с профилем Томаса Юнга.

«Посвящается памяти Томаса Юнга — доктора медицины, члена и секретаря по иностранной переписке Королевского Общества, члена Национального Института Франции человека одинаково выдающегося почти в каждом разделе человеческого знания, терпеливо и непрерывно трудившегося, одаренного способностью интуитивного понимания, проявившего равное мастерство в наиболее глубоких исследованиях как литературы, так и науки».

Для вычисления координат искомых точек рекомендуются сделать схематический чертеж треугольника (см рис.2.3). При обозначении вершин треугольника руководствуются следующими правилами: если смотреть с середины исходной стороны на определяемый пункт, то слева должен быть исходный пункт и измеренный угол α, а справа – исходный пункт и измеренный угол β.

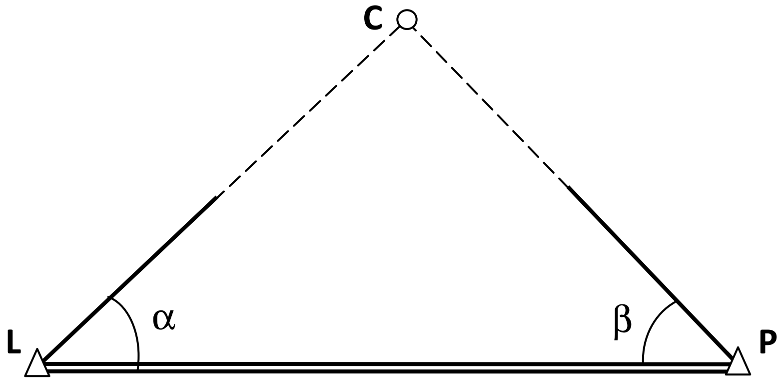

Рис. 2.3 Вспомогательный чертеж треугольника

Вычисления выполняются по формулам:

$$X_C = \frac{\mathrm{X_L ctg}\,\beta + \mathrm{X_P ctg}\alpha + \mathrm{Y_P} - \mathrm{Y_L}}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta},$$

$$Y_C = \frac{\mathrm{Y_L ctg}\,\beta + \mathrm{Y_P ctg}\alpha + \mathrm{X_P} - \mathrm{X_L}}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}, \qquad (2.45)$$

где X_L, Y_L, X_P, Y_P – координаты левого L и правого пункта P, соответственно.

Для контроля вычислений координат пункта L, координаты пунктов P (левый) и C (правый) принимают за исходные, а угол в пункте C равным $180° - (\alpha + \beta)$.

Применяя эти правила и формулы Юнга к треугольникам Δ ИЛЕ и Δ ИЛЖ геодезического четырехугольника (см. рис. 2.2) получим приближенные координаты искомых пунктов, которые занесем в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Вычисление приближенных координат искомых пунктов

Наименование пунктов	Измеренные углы	Координаты	
		X_C	Y_C
И	57°02'10,76''	4615909.521	7218431.808
Л	44°02'31,04''	4618742.625	7221870.144
Е	78°55'18,20''	4619045.068	7218073.227
И		4615909.521	7218431.808
Л	42°56'32,14''	4618742.625	7221870.144
И	36°45'00,22''	4615909.521	7218431.808
Ж	100°18'27,64''	4616056.864	7221513.215
Л		4618742.625	7221870.144

Вычисленные приближенные координаты пунктов Е и Ж занесем в табл. 2.1.

Составим уравнение поправок измеренных углов. Для этого графически на рис. 2.4 покажем измеренные углы. Здесь показано, что на пункте С измерены направления на пункты L и P относительно нулевого направления CO.

В соответствии с (2.7) уравнения поправок направлений С L и CP имеют вид:

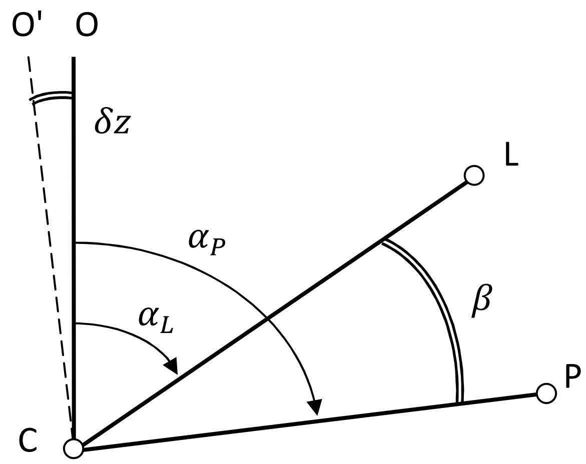

Рис. 2.4. Иллюстрация измеренных направлений

$$-\delta z + a_L \delta x_L + b_L \delta y_L + c_L \delta x_C + e_L \delta y_C + l_L = V_L,$$

$$-\delta z + a_P \delta x_P + b_P \delta y_P + c_P \delta x_C + e_P \delta y_C + l_P = V_P, \qquad (2.46)$$

где δz - поправка нулевого направления (нулевого диаметра лимба), $\delta x, \delta y$ – поправки к приближенным координатам.

Известно, что угол β равен разности направлений, т.е. $\beta = \alpha_P - \alpha_L$.

Вычитая в системе уравнений (2.46) из второго уравнения первое, получим:

$$-a_L \delta x_L - b_L \delta y_L + a_P \delta x_P + b_P \delta y_P - (c_L - c_P)\delta x_C -$$

$$-(e_L - e_P)\delta y_C + l_\beta = V_\beta, \qquad (2.47)$$

где V_β- поправка в измеренный угол β .

Введем обозначения $\Delta X_L = X_L^0 - X_C^0;\ \Delta X_P = X_P^0 - X_C^0;\ \Delta Y_L = Y_L^0 - Y_C^0;$ $\Delta Y_P = Y_P^0 - Y_C^0.$

Приближенные значения дирекционных углов и длин линий CL и CP найдем по формулам:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_L = \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha_P = \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P},$$

$$d_L^2 = \Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2, d_P^2 = \Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2. \tag{2.48}$$

На основании (2.6) и с учетом полученных формул (2.48) найдем значения коэффициентов a, b, c, e, в выражении (2.47). Получим:

$$a_L = \frac{\partial \alpha_L}{\partial X_L} = -\rho \frac{\sin\alpha_L \cos\alpha_L}{\Delta X_L} = -\rho \frac{\sin\alpha_L d_L}{d_L d_L} = -\rho \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2},$$

$$b_L = \frac{\partial \alpha_L}{\partial Y_L} = \rho \frac{\sin\alpha_L \cos\alpha_L}{\Delta Y_L} = \rho \frac{\cos\alpha_L d_L}{d_L d_L} = \rho \frac{\Delta X_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2},$$

$$c_L = \frac{\partial \alpha_L}{\partial X_C} = \rho \frac{\sin\alpha_L \cos\alpha_L}{\Delta X_L} = \rho \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2} = -a_L ,$$

$$e_L = \frac{\partial \alpha_L}{\partial Y_C} = -\rho \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2} = -b_L.$$

По аналогии найдем коэффициенты $a_P,\ b_P,\ c_P,\ e_L$

$$a_P = \frac{\partial \alpha_P}{\partial X_P} = -\rho \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2}, \qquad b_P = \frac{\partial \alpha_P}{\partial Y_P} = \rho \frac{\Delta X_P}{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2},$$

$$\mathrm{c}_P = \frac{\partial \alpha_P}{\partial X_C} = -a_P , \qquad e_P = \frac{\partial \alpha_P}{\partial Y_C} = -b_P.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в уравнение (2.47) получим уравнение поправок в окончательном виде:

$$\rho \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L + \Delta Y_L} \delta x_L - \rho \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L + \Delta Y_L} \delta y_L - \rho \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P + \Delta Y_P} \delta x_P +$$

$$+\rho\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P+\Delta Y_P}\delta y_P-\ \rho\left(\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2+\Delta Y_L^2}-\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P^2+\Delta Y_P^2}\right)\delta x_C+$$

$$+\rho\left(\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2+\Delta Y_L^2}-\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P^2+\Delta Y_P^2}\right)\delta y_C+l_\beta=V_\beta\ . \tag{2.49}$$

Свободный член уравнения поправок вычислим по формуле

$$l_\beta=\beta_{выч}-\beta_{изм}\ , \tag{2.50}$$

где $\operatorname{tg}\beta_{выч}=\frac{\Delta X_L\Delta Y_P-\Delta X_P\Delta Y_L}{\Delta X_L\Delta Y_P+\Delta Y_L\Delta Y_P}$.

Принимая во внимание, что в координаты исходных пунктов поправки не вводятся, а также для удобства вычислений коэффициентов и значений углов геодезического четырехугольника (см. рис.2.2) сведем формульные соотношения их вычисления в табл. 2.4.

По формулам, приведенным в последней колонке табл.2.4, используя при этом исходные и приближенные координаты пунктов, вычислим углы $\beta_{выч}$. Результаты вычислений табулируем в две таблицы (табл. 2.5 и 2.2).

Таблица 2.4

Формулы для вычисления коэффициентов уравнения поправок и тангенсов углов, вычисленных по приближенным координатам

∠ и пункты	Формулы для вычисления поправок по приближенным координатам				Тангенсы углов
	δx_E	δy_E	$\delta x_Ж$	$\delta y_Ж$	$\operatorname{tg}\beta_{выч}$
1/И	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЖЛ}}{\Delta X_{ЖЛ}^2+\Delta Y_{ЖЛ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ИЕ}}{\Delta X_{ИЕ}^2+\Delta Y_{ИЕ}^2}$	…	…	$\frac{\Delta X_{ИЕ}\Delta Y_{ИЛ}-\Delta X_{ИЛ}\Delta Y_{ИЕ}}{\Delta X_{ИЕ}\Delta X_{ИЛ}+\Delta Y_{ИЕ}\Delta Y_{ИЛ}}$

2/Е	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЕИ}}{\Delta X_{ЕИ}^2+\Delta Y_{ЕИ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta X_{ЕИ}}{\Delta X_{ЕИ}^2+\Delta Y_{ЕИ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЕЖ}^2+\Delta Y_{ЕЖ}^2}$	$\frac{\Delta X_{ЕЖ}\Delta Y_{ЕИ}-\Delta X_{ЕИ}\Delta Y_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЕЖ}\Delta X_{ЕИ}+\Delta Y_{ЕЖ}\Delta Y_{ЕИ}}$
3/Е	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЕЛ}}{\Delta X_{ЕЛ}^2+\Delta Y_{ЕЛ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЕЖ}^2+\Delta Y_{ЕЖ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЕЛ}}{\Delta X_{ЕЛ}^2+\Delta Y_{ЕЛ}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta X_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЕЖ}^2+\Delta Y_{ЕЖ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЕЖ}^2+\Delta Y_{ЕЖ}^2}$	$\rho\frac{\Delta Y_{ЕЖ}}{\Delta X_{ЕЖ}^2+\Delta Y_{ЕЖ}^2}$	$\frac{\Delta X_{ЕЛ}\Delta Y_{ЕЖ}-\Delta X_{ЕЖ}\Delta Y_{ЕЛ}}{\Delta X_{ЕЛ}\Delta X_{ЕЖ}+\Delta Y_{ЕЛ}\Delta Y_{ЕЖ}}$
4/Л	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЛЕ}}{\Delta X_{ЛЕ}^2+\Delta Y_{ЛЕ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЛЕ}}{\Delta X_{ЛЕ}^2+\Delta Y_{ЛЕ}^2}$	…	…	$\frac{\Delta X_{ЛИ}\Delta Y_{ЛЕ}-\Delta X_{ЛЕ}\Delta Y_{ЛИ}}{\Delta X_{ЛИ}\Delta X_{ЛЕ}+\Delta Y_{ЛИ}\Delta Y_{ЛЕ}}$
5/Л	…	…	$\rho\frac{\Delta Y_{ЛЖ}}{\Delta X_{ЛЖ}^2+\Delta Y_{ЛЖ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ЛЖ}}{\Delta X_{ЛЖ}^2+\Delta Y_{ЛЖ}^2}$	$\frac{\Delta X_{ЛЖ}\Delta Y_{ЛИ}-\Delta X_{ЛИ}\Delta Y_{ЛЖ}}{\Delta X_{ЛЖ}\Delta X_{ЛИ}+\Delta Y_{ЛЖ}\Delta Y_{ЛИ}}$
6/Ж	$\rho\frac{\Delta Y_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЖЛ}}{\Delta X_{ЖЛ}^2+\Delta Y_{ЖЛ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta X_{ЖЛ}}{\Delta X_{ЖЛ}^2+\Delta Y_{ЖЛ}^2}$	$\frac{\Delta X_{ЖЕ}\Delta Y_{ЖЛ}-\Delta X_{ЖЛ}\Delta Y_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}\Delta X_{ЖЛ}+\Delta Y_{ЖЕ}\Delta Y_{ЖЛ}}$
7/Ж	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЖИ}}{\Delta X_{ЖИ}^2+\Delta Y_{ЖИ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЖИ}}{\Delta X_{ЖИ}^2+\Delta Y_{ЖИ}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta X_{ЖЕ}}{\Delta X_{ЖЕ}^2+\Delta Y_{ЖЕ}^2}$	$\frac{\Delta X_{ЖИ}\Delta Y_{ЖЕ}-\Delta X_{ЖЕ}\Delta Y_{ЖИ}}{\Delta X_{ЖИ}\Delta X_{ЖЕ}+\Delta Y_{ЖИ}\Delta Y_{ЖЕ}}$
8/И	…	…	$-\rho\frac{\Delta Y_{ИЖ}}{\Delta X_{ИЖ}^2+\Delta Y_{ИЖ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ИЖ}}{\Delta X_{ИЖ}^2+\Delta Y_{ИЖ}^2}$	$\frac{\Delta X_{ИЛ}\Delta Y_{ИЖ}-\Delta X_{ИЖ}\Delta Y_{ИЛ}}{\Delta X_{ИЛ}\Delta X_{ИЖ}+\Delta Y_{ИЛ}\Delta Y_{ИЖ}}$

Свободный член l_β уравнения поправок (2.49) вычислим по формуле (2.50), при этом вычисляя тангенсы углов по формулам, приведенным в шестой колонке таблицы 2.4, а также значения координат ΔY и ΔX (см. табл.2.5).

По формулам, приведенным в табл.2.4 и используя значения приращений ΔY и ΔX (см. табл.2.5), вычислим численные значения коэффициентов уравнений поправок. Так как величины приращений ΔY и ΔX измеряются в метрах, а коэффициенты a, b, c, e имеют размерность с/м. Численные значения этих коэффициентов в уравнении поправок (3.49) окажутся очень большими, что создаст трудности при дальнейшей обработке и может привести к потери точности вычислений.

Таблица 2.5

Результаты вычисления углов по координатам

№ угла	Направления	Приращения		$\operatorname{tg}\beta_{\text{выч}}$	$\beta_{\text{выч}}$
		ΔY	ΔX		
1	ИЕ	-3135,547	358,581	1,54200406	57°02'10,75"
	ИЛ	-2833,104	-3438,336		
2	ЕЖ	2988,204	-3439,988	0,91621018	42°29'46,43"
	ЕИ	3135,547	-358,581		
3	ЕЛ	302,443	-3796,917	0,73795065	36°25'31,78"
	ЕЖ	2988,204	3439,988		
4	ЛИ	2833, 104	3438,336	0,96710484	44°02'31,03"
	ЛЕ	-302,443	3796,917		
5	ЛЖ	2685,761	356,929	0,93063256	42°56'32,11"
	ЛИ	2833,104	3438,336		
6	ЖЕ	-2988,204	3439,988	1,51602097	56°35'25,07"
	ЖЛ	-2685,761	-356,929		
7	ЖИ	147,343	3081,407	0,95620139	43°43'02,58"
	ЖЕ	-2988,206	3439,988		
8	ИЛ	-2833,104	-3438,336	0,74673719	36°45'00,23"
	ИЖ	-147,343	-3081,407		

Во избежание этих неудобств необходимо перейти от размерности $с/м$ к размерности $с/см$. Для этого достаточно уменьшить постоянную ρ в 100 раз, т.е. принять $\rho = 2062{,}65$.

Из численных значений полученных коэффициентов уравнений формируем матрицу **A**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -0{,}074 & -0{,}649 & 0 & 0 \\ -0{,}267 & 0{,}352 & 0{,}342 & 0{,}297 \\ -0{,}198 & 0{,}254 & -0{,}342 & -0{,}297 \\ 0{,}540 & 0{,}043 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}100 & 0{,}755 \\ -0{,}342 & -0{,}297 & 0{,}442 & -0{,}458 \\ 0{,}342 & 0{,}297 & 0{,}326 & -0{,}329 \\ 0 & 0 & 0{,}668 & 0{,}032 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу **A** и умножим ее слева на такую же матрицу. В результате получим матрицу коэффициентов нормальных уравнений

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}641 & 0{,}130 & -0{,}063 & 0{,}023 \\ 0{,}130 & 0{,}788 & -0{,}001 & 0{,}068 \\ -0{,}063 & -0{,}001 & 0{,}991 & -0{,}204 \\ 0{,}023 & 0{,}068 & -0{,}204 & 1{,}064 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную матрице А

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}624 & 0{,}267 & 0{,}104 & 0{,}001 \\ -0{,}267 & 1{,}320 & -0{,}033 & -0{,}084 \\ 0{,}104 & -0{,}033 & 1{,}057 & 0{,}202 \\ 0{,}001 & -0{,}084 & 0{,}202 & 0{,}983 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу-столбец свободных членов нормальных уравнений

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1{,}876 \\ 0{,}797 \\ -1{,}478 \\ -0{,}587 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу-столбец поправок к приближенным координатам. Результаты получим в сантиметрах.

$$\Delta = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2{,}68 \\ -0{,}65 \\ 1{,}51 \\ 0{,}94 \end{pmatrix}.$$

Полученные поправки внесем в табл. 2.1, предварительно уменьшив их во 100 раз, для того чтобы их размерность была в метрах.

Вычислим матрицу-столбец поправок к измеренным углам

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\Delta + \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0{,}613 \\ -0{,}913 \\ 0{,}612 \\ -1{,}482 \\ 0{,}530 \\ -0{,}990 \\ 1{,}125 \\ -0{,}966 \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты заносим в табл.2.2 и определяем уравненные углы.

Осуществим контрольные операции.

1. Проверяем соотношение $\boldsymbol{A^T V} = 0$.
2. Сумма поправок должна равняться сумме свободных членов уравнений поправок.

По формуле (2.29) определим эмпирическую среднеквадратическую погрешность измерения угла $m = 1{,}34''$, а по формуле (2.30) оценим ее надежность.

Обозначим $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{Q}$, и используя выражения (2.22) найдем среднеквадратические погрешности положения определяемых пунктов по осям координат:

Пункт **Е**	Пункт **Ж**
$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = 1{,}71$ см,	$m_x = m\sqrt{Q_{33}} = 1{,}38$ см,
$m_y = m\sqrt{Q_{22}} = 1{,}54$ см,	$m_y = m\sqrt{Q_{44}} = 1{,}33$ см.

По формуле (2.24) находим круговые среднеквадратические погрешности положения определяемых пунктов $m_E = 2{,}3$ см, $m_Ж = 1{,}9$ см.

Используя элементы матрицы $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{Q}$, и выражения (2.26) и (2.27) найдем параметры эллипса погрешностей положения определяемых пунктов.

Пункт **Е**	Пункт **Ж**
$Q_{xx} = 1{,}624,$	$Q_{xx} = 1{,}057,$
$Q_{yy} = 1{,}320,$	$Q_{yy} = 0{,}983,$
$Q_{xy} = -0{,}267,$	$Q_{xy} = 0{,}202,$
$\mathrm{tg}\, 2\varphi = -1{,}7566,$	$\mathrm{tg}\, 2\varphi = 5{,}4594,$
$\varphi = 149^0 50',$	$\varphi = 39^0 49',$
$Q_{uu} = 1{,}78,$	$Q_{uu} = 1{,}22,$
$Q_{vv} = 1{,}16,$	$Q_{vv} = 0{,}81,$
$a = 1{,}8$ см,	$a = 1{,}5$ см,
$b = 1{,}4$ см,	$b = 1{,}2$ см.

Построим эллипс погрешностей на схеме геодезической сети. По формуле (2.31) вычисляем среднеквадратическую погрешность уравненного угла $m_{\text{ур}} = 0{,}95''$.

Таким образом, на примере поиска неизвестных координат пункта Е и Ж показаны основные процедуры триангуляционного метода параметрического уравнивания.

Лекция не закончена!!!