Содержательный модуль 4. Оценка точности функций непосредственно измеренных величин

1.4.1. Основная теорема теории погрешностей

В геодезической практике, как правило, используются не отдельные непосредственно измеренные величины, а их функции, т.е. косвенные измерения. Так, например, уклон линии определяют как отношение непосредственно измеренного превышения и длины линии. Длина линии, недоступной для непосредственного измерения, вычисляется из решения треугольника, у которого непосредственно измерены базисная сторона и горизонтальные углы. Площадь земельного участка прямоугольной формы вычисляют как произведение непосредственно измеренных длин и широты участка. Перечень подобных примеров можно продолжать. Отсюда возникает *задача оценивания точности функции измеренных величин* по известным стандартам σ или средним квадратичным погрешностям m непосредственно измеренных аргументов. Для решения этой задачи докажем теорему.

Теорема.

Если дана непрерывная дифференцируемая по всем аргументам функция

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_t), \tag{4.1}$$

аргументы которой $x_1, x_2, \cdots, x_t$ - независимые результаты непосредственных измерений некоторых величин $X_1, X_2, \cdots, X_t$ выполненных в условиях, характеризуемых стандартами $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$, то стандарт данной функции будет равен

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}\,, \tag{4.2}$$

где - $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ частные производные функции (4.1) по переменным $x_1, x_2, \cdots, x_t$, $i = \overline{1, t}$.

Доказательство. Из курса математического анализа известно, что полный дифференциал функции (4.1) равен

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t} dx_t. \tag{4.3}$$

Предположим, что величины $x_1, x_2, \cdots, x_t$ измерены n раз. При этом результаты измерений содержат случайные погрешности, которые обозначим:

$$\Delta_1', \Delta_2', ..., \Delta_t'; \;\; \Delta_1'', \Delta_2'', ..., \Delta_t''; \; \ldots \; \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, ..., \Delta_t^{(n)}.$$

Наглядно в графической форме величины измерений и их погрешности, иллюстрируются рис. 4.1.

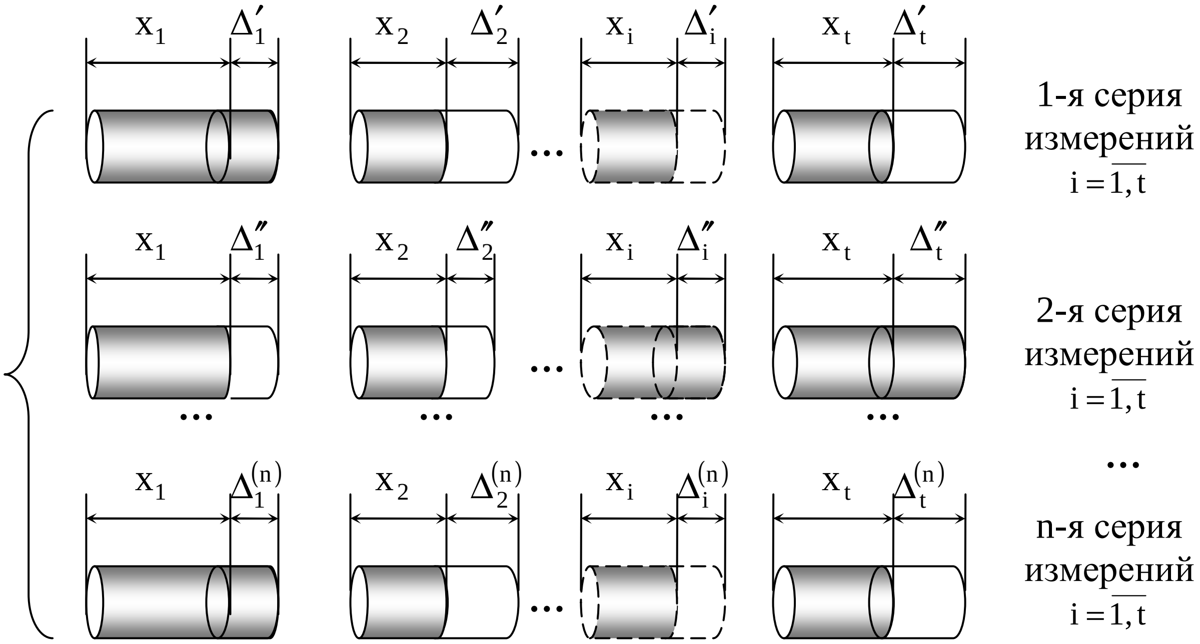


Рис. 4.1. Графическая интерпретация величин измерений и их погрешностей

Полагая, что погрешности Δ_i являются приращениями величин x_i (малыми величинами), то на основании записи полного дифференциала (4.3) можно записать систему уравнений в частных производны, где каждое из уравнений характеризует изменение погрешностей в серии измерений величин $x_1, x_2, \cdots, x_t$

$$\Delta' y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1' + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t',$$

$$\Delta'' y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1'' + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2'' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i'' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t'',$$

$$\ldots \tag{4.4}$$

$$\Delta^{(n)} y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1^{(n)} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2^{(n)} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i^{(n)} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t^{(n)}.$$

Заметим, что каждый элемент $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i'$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i''$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i^{(n)}$, $i=\overline{1,t}$ системы уравнений (многочленов) содержит константу $\frac{\partial y}{\partial x_i}=\text{const}$. Для того чтобы оценить точность функции измеренных величин $y=f(x_1,x_2,...,x_t)$ с использованием стандарта σ или средней квадратичной погрешности m (см. формулы 1.13 и 3.6) необходимо осуществить следующие преобразования с системой уравнений (4.4.). Возвести в квадрат правые и левые части каждого из уравнений. Получим

$$
\begin{gathered}
(\Delta' y)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2(\Delta_1')^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2(\Delta_2')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2(\Delta_i')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2(\Delta_t')^2,\\
(\Delta'' y)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2(\Delta_1'')^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2(\Delta_2'')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2(\Delta_i'')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2(\Delta_t'')^2,\\
\ldots \qquad (4.5)\\
\left(\Delta^{(n)} y\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\left(\Delta_1^{(n)}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\left(\Delta_2^{(n)}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\left(\Delta_i^{(n)}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2\left(\Delta_t^{(n)}\right)^2.
\end{gathered}
$$

Теперь каждое из уравнений представляет собой сумму квадратов. Для того чтобы привести правые части уравнений к виду известных формул сокращенного умножения многочленов $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ добавим к каждому уравнению суммы произведений состоящих из двух пар в каждом многочлене. Получим

$$
\begin{gathered}
(\Delta' y)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2(\Delta_1')^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2(\Delta_2')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2(\Delta_i')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2(\Delta_t')^2+\\
+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\Delta_1'\cdot\Delta_2'+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\Delta_1'\cdot\Delta_3'+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_{t-1}'\cdot\Delta_t';\\
(\Delta'' y)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2(\Delta_1'')^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2(\Delta_2'')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2(\Delta_i'')^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2(\Delta_t'')^2+\\
+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\Delta_1''\cdot\Delta_2''+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\Delta_1''\cdot\Delta_3''+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_{t-1}''\cdot\Delta_t'';\\
\ldots \qquad (4.6)
\end{gathered}
$$

$$\left(\Delta^{(n)}y\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\left(\Delta_1^{(n)}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\left(\Delta_2^{(n)}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\left(\Delta_i^{(n)}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2\left(\Delta_t^{(n)}\right)^2+$$

$$+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\Delta_1^{(n)}\cdot\Delta_2^{(n)}+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\Delta_1^{(n)}\cdot\Delta_3^{(n)}+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_{t-1}^{(n)}\cdot\Delta_t^{(n)}.$$

Просуммируем переменные левой и правой части полученных многочленов и запишем их в символах Гаусса К.Ф.

$$\begin{aligned}
&\left[\Delta^2 y\right]=(\Delta' y)^2+(\Delta'' y)^2+\cdots+\left(\Delta^j y\right)^2+\cdots+\left(\Delta^{(n)}y\right)^2,\ j=\overline{1,n};\\
&\left[\Delta_1^2\right]=(\Delta_1')^2+(\Delta_1'')^2+\cdots+\left(\Delta_1^j\right)^2+\cdots+\left(\Delta_1^{(n)}\right)^2;\\
&\left[\Delta_2^2\right]=(\Delta_2')^2+(\Delta_2'')^2+\cdots+\left(\Delta_2^j\right)^2+\cdots+\left(\Delta_2^{(n)}\right)^2;\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&\left[\Delta_t^2\right]=(\Delta_t')^2+(\Delta_t'')^2+\cdots+\left(\Delta_t^j\right)^2+\cdots+\left(\Delta_t^{(n)}\right)^2;\\
&\left[\Delta_i\Delta_j\right]=\Delta_1'\cdot\Delta_2'+\Delta_1''\cdot\Delta_2''+\cdots+\Delta_1^{(n)}\Delta_2^{(n)};\\
&\left[\Delta_{i+1}\Delta_{j+1}\right]=\Delta_1'\cdot\Delta_3'+\Delta_1''\cdot\Delta_3''+\cdots+\Delta_1^{(n)}\Delta_3^{(n)};\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&\left[\Delta_{t-1}\Delta_t\right]=\Delta_{t-1}'\cdot\Delta_t'+\Delta_{t-1}''\cdot\Delta_t''+\cdots+\Delta_{t-1}^{(n)}\cdot\Delta_t^{(n)}.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

Разделим полученные суммы на n и запишем окончательное выражение, учитывающее все переменные (погрешности Δ_i) системы уравнений (4.4)

$$\frac{\left[\Delta^2 y\right]}{n}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\frac{\left[\Delta_1^2\right]}{n}+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\frac{\left[\Delta_2^2\right]}{n}+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2\frac{\left[\Delta_t^2\right]}{n}+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\frac{\left[\Delta_i\Delta_j\right]}{n}+$$

$$+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\frac{\left[\Delta_{i+1}\Delta_{j+1}\right]}{n}+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\frac{\partial y}{\partial x_t}\cdot\frac{\left[\Delta_{t-1}\Delta_t\right]}{n}.\tag{4.8}$$

Предполагая, что $n\to\infty$, найдем пределы левой и правой части полученного выражения. На основе свойства независимости (1.12) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\Delta_i\Delta_j\right]}{n}=0.\tag{4.9}$$

Учитывая свойство рассеяния (1.12) для правой и левой части уравнения (4.8) справедливо записать

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\lfloor\Delta^2 y\right\rfloor}{n}=\sigma_y^2, \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\lfloor\Delta_i^2\right\rfloor}{n}=\sigma_i^2, \quad i=\overline{1,t}. \tag{4.11}$$

Упростим выражение (4.8) отбросив двойные суммы $2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\frac{\left\lfloor\Delta_i\Delta_j\right\rfloor}{n}$, так как выражение (4.9) их превращает в нуль, и, применяя к его левой части предельное значение формулы (4.10), а к правой части предельные значения формулы (4.11) и извлекая из них квадратные корни, получим выражение (4.2), что и требовалось доказать.

4.2. Применение основной теоремы для расчета предельно допустимых невязок

Расчет допустимой угловой невязки теодолитного хода

Будем полагать, что все углы теодолитного хода измерены с классом точности технического теодолита в условиях, характеризуемых стандартом $\sigma_\beta=30''$ и являются равноточными. Известно, что угловая невязка вычисляется по формуле

$$f_\beta=\sum\beta_{\text{èçì}}-\sum\beta_{\text{òåîð}}=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_i+\cdots+\beta_n-\sum\beta_{\text{òåîð}}, \; i=\overline{1,n} \tag{4.12}$$

где $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ - независимые переменные величины, $\sum\beta_{\text{òåîð}}$ - для данного хода является величиной постоянной.

Найдем частные производные функции (4.12) по переменным β_i:

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\beta_1}=\frac{\partial f_\beta}{\partial\beta_2}=\cdots=\frac{\partial f_\beta}{\partial\beta_n}=1. \tag{4.13}$$

Воспользуемся формулой (4.2), характеризующей стандарт рассматриваемой функции и, учитывая полученную формулу (4.13), а также учитывая ограничение, что все измерения равноточные можно записать

$$\sigma_{f_\beta}=\sigma_\beta\sqrt{\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{\text{n ñëàãàåìûõ}}}=\sigma_\beta\sqrt{n}=30''\sqrt{n}.$$

Для расчета предельной невязки воспользуемся выражением (3.10). Тогда для нашего случая, где $\sigma_\beta = 30''$ допустимая угловая невязка теодолитного хода рассчитывается по формуле:

$$f_{\beta_{ïð}} = 2\sigma_{f_\beta} = 1'\sqrt{n}\,. \tag{4.14}$$

Расчет допустимой угловой невязки нивелирного хода

Предположим, что нивелирный ход длиной L км проложен на равнинной местности, где на каждый километр хода приходится примерно одно и то же число станций при среднем расстоянии $\bar{l}$ между рейками на одной станции. Черточка над буквой l обозначает среднее значение расстояния. Следовательно, число всех станций соответствующих длине хода будет близким к величине

$$n \approx \frac{L}{\bar{l}}\,. \tag{4.15}$$

Кроме того, измерения на станции будем считать равноточными выполненными в условиях, характеризуемых стандартом $\sigma_{ñò}$.

Невязку нивелирного хода рассчитывают по формуле

$$f_h = \sum h_{èçì} - \sum h_{òåîð} = h_1 + h_2 + \cdots + h_i + \cdots + h_n - \sum h_{òåîð}\ ,\ i = \overline{1, n}\ , \tag{4.16}$$

где $h_1, h_2, ..., h_n$ как и в выражении (4.12) независимые переменные, $\sum h_{òåîð}$ - постоянная величина.

Находим частные производные функции (4.16) по переменным h_i

$$\frac{\partial f_h}{\partial h_1} = \frac{\partial f_h}{\partial h_2} = \cdots = \frac{\partial f_h}{\partial h_n} = 1. \tag{4.17}$$

По аналогии с расчетом допустимой угловой невязки теодолитного хода для расчета допустимой невязки нивелирного хода запишем

$$\sigma_{f_h} = \sigma_{ñò}\sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{\text{n ñëàãàåìûõ}}} = \sigma_{ñò}\sqrt{n}\,. \tag{4.18}$$

Для расчета предельной невязки нивелирного хода воспользуемся формулой (3.11). Тогда учитывая выражение (4.15) получим

$$f_{h_{ïð}} = 3\sigma_{f_h} = \frac{3\sigma_{ñò}\sqrt{L}}{\sqrt{\bar{l}}}. \qquad (4.19)$$

Величины стандарта $\sigma_{ñò}$ для каждого класса нивелирования установлены нормативными документами, т.е. являются постоянными. Упростим формулу (4.19), введя следующее обозначение

$$\eta = \frac{3\sigma_{ñò}}{\sqrt{\bar{l}}}$$

и подставим его в выражение (4.19), получим известную из геодезии формулу

$$f_{h_{ïð}} = \eta\sqrt{L}, \qquad (4.20)$$

где η- коэффициент, зависящий от класса нивелирования. Для IV класса $\eta = 20$ мм, для технического нивелирования $\eta = 50$ мм.

4.3. Апостериорная оценка точности функций измеренных величин

На практике при апостериорной оценке точности функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_t)$ измеренных величин $X_1, X_2, \cdots, X_t$ неизвестные стандарты $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$ в форму-ле (4.2) заменяют среднеквадратическими погрешностями $m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_t$. Тогда

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot m_t^2}. \qquad (4.21)$$

Расчеты выполняются в следующей последовательности:

1. функцию (4.1) записывают в явном виде;
2. находят частные производные этой функции по всем независимым переменным;
3. подставляем частные производные и средние квадратичные погрешности в формулу (4.21);
4. выполняются необходимые математические преобразования и получают окончательный результат.

Пример 1. По известным результатам измерений, высоты уклона $h_{ÀÂ} = 12{,}6\ ì$, и проекции линии АВ $d_{AB} = 468\ ì$ и оценкам их точности измерений (среднеквадратическим погрешностям) $m_h = 0{,}1\ ì$ и $m_d = 0{,}5\ ì$, соответственно, необходимо найти среднеквадратическую погрешность уклона линии АВ, схематично изображенного на рис. 4.2.

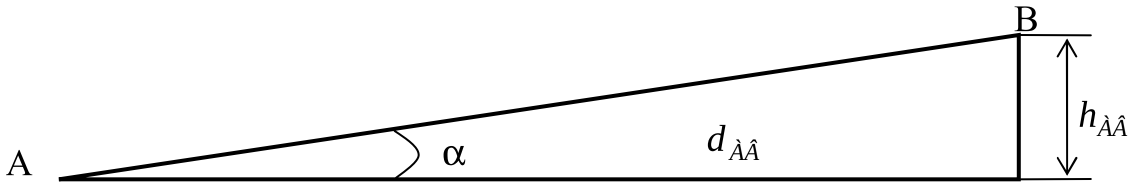


Рис. 4.2. Графическая интерпретация уклона

Решение.

Используя рекомендованную последовательность оценивания точности измеренных величин, зададим в явном виде функцию измерения уклона известную из геодезии $\mathrm{i} = \mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{i} = \frac{\mathrm{h_{AB}}}{\mathrm{d_{AB}}}$. Подставляя в формулу заданные численные значения, получим $\mathrm{i} = \frac{12{,}6}{468} = 0{,}027$.

Вторым шагом в решении поставленной задачи является нахождение частных производных функции $\mathrm{i} = \frac{\mathrm{h_{AB}}}{\mathrm{d_{AB}}}$ по переменным $\mathrm{h_{ÀÂ}}$ и $\mathrm{d_{AB}}$. Продифференцируем эту функцию сначала по переменной $\mathrm{h_{ÀÂ}}$ зафиксировав переменную $\mathrm{d_{AB}}$, получим $\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial \mathrm{h_{AB}}} = \frac{1}{\mathrm{d}}$, а за тем по переменной $\mathrm{d_{AB}}$ зафиксировав $\mathrm{h_{ÀÂ}}$,

$$\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial \mathrm{d_{AB}}} = -\frac{\mathrm{h_{AB}}}{\mathrm{d_{AB}^2}} = -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{d_{AB}}}.$$

На третьем шаге решения поставленной задачи воспользуемся формулой (4.21) преобразуя ее в формулу для вычисления среднеквадратической погрешности уклона. Формула (4.21) примет вид:

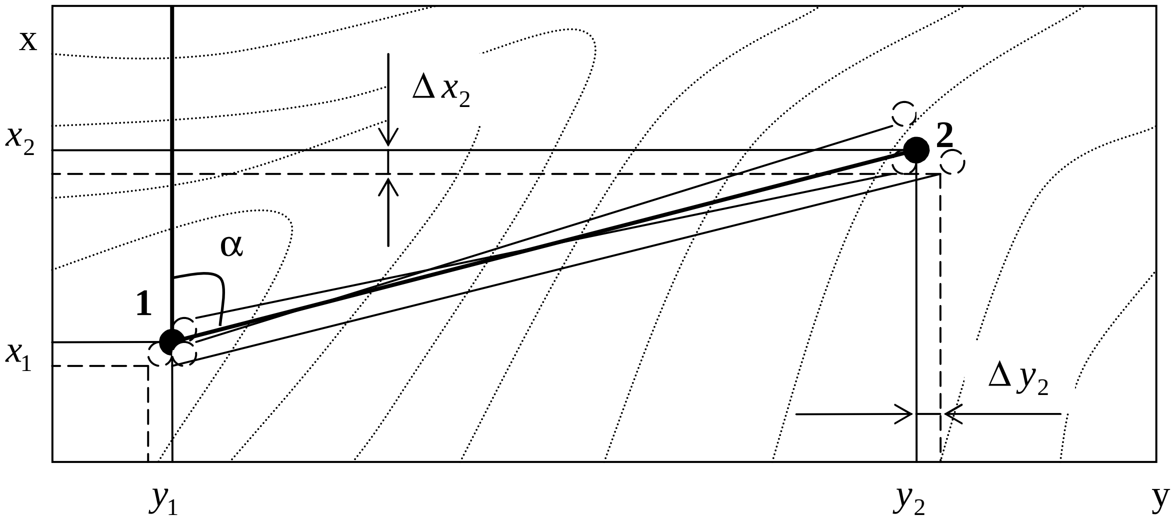
$$\mathrm{m_i} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{d}^2}\mathrm{m_h^2} + \frac{\mathrm{i}^2}{\mathrm{d}^2}\mathrm{m_d^2}}.$$

На четвертом шаге решения задачи в полученную формулу подставим численные значения и сделаем соответствующие вычисления, получим $m_i \approx 0{,}0002$.

Таким образом, задача нахождения среднеквадратической погрешности уклона по заданным апостериорным оценкам решена. Малая величина m_i свидетельствует о точном измерении уклона заданной линии.

Пример 2. На топографической карте измерены прямоугольные координаты x и y точек 1 и 2 (см. рис.4.3). Среднеквадратические погрешности определения координат точек равны $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{y_1} = m_{y_2} = \overline{m}$. По координатам вычислены длины d и дирекционный угол α линии 1-2.

Необходимо определить среднеквадратические погрешности m_d и m_α.



$\Delta x_2, \Delta y_2$ - погрешность одного измерения координат точки 2

Рис. 4.3. Графическая интерпретация многократного измерения координат двух точек

Решение.

Из условий задачи видно, что вычисление длинны линии d зависит от результатов измерения координат точек 1 и 2. Следовательно, переменными в данном случае являются координаты точек 1 (x_1, y_1) и 2 (x_2, y_2), а функцией этих переменных можно считать выражение, которое связывает результат измерения координат точек с расстоянием между этими точками d, а именно

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Возьмем частные производные от d по переменным x_1, x_2, y_1, y_2.

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = -\frac{2(x_2 - x_1)}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{x_2 - x_1}{d} = -\cos\alpha\,; \quad \frac{\partial d}{\partial x_2} = \cos\alpha\,;$$

$$\frac{\partial d}{\partial y_1} = -\frac{2(y_2 - y_1)}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{y_2 - y_1}{d} = -\sin\alpha\,; \quad \frac{\partial d}{\partial y_2} = \sin\alpha\,.$$

Преобразуем выражения (4.21) с учетом результатов дифференцирования и равенства среднеквадратических погрешностей, заданных в условии задачи запишем

$$m_d = \sqrt{(-\tilde{n}os\,\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2 + (\cos\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2 + (-\sin\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2 + (\sin\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2}\ .$$

Преобразуем полученное выражение и вынесем $\overline{m}$ за знак радикала

$$m_d = \overline{m}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha}\ .$$

Упростим подкоренное выражение, используя известную тригонометрическую формулу $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Тогда $m_d = \overline{m}\sqrt{2}$. Получена формула для вычисления среднеквадратической погрешности измерения m_d длины линии d.

Для вычисления среднеквадратической погрешности m_α воспользуемся тригонометрической функцией, которая связывает дирекционный угол с результатами измерений координат точек 1 и 2. Такая функция очевидна (см. рис.4.3) и имеет вид:

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Для удобства дальнейших преобразований прологарифмируем полученную функцию: *Почему натуральный логарифм?*

$$\ln tg\,\alpha = \ln(y_2 - y_1) - \ln(x_2 - x_1).$$

Вычислим производную левой части, полученного уравнения:

$$(\ln tg\,\alpha)' = \frac{1}{tg\,\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}\,.$$

Найдем частные производные от α по переменным x_1, x_2, y_1, y_2:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\sin\alpha}{d};\ \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = -\frac{\sin\alpha}{d};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y_1} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{y_2 - y_1} = -\frac{\cos\alpha}{d};\ \frac{\partial\alpha}{\partial y_2} = \frac{\cos\alpha}{d}.$$

Производя преобразования с использованием формулы (4.21) и упрощения аналогичные предыдущему примеру получим

$$m_\alpha = \frac{m}{d}\rho\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{m\sqrt{2}}{d}\rho.$$

Здесь ρ - коэффициент перехода от радианной меры к градусной $\rho = 3438$ (число минут в одном радиане).

Таким образом, получены две простых формулы при помощи, которых можно вычислить значение среднеквадратической погрешности m_d измерения длины линии d, а также значения среднеквадратической погрешности m_α дирекционного угла α. Причем погрешность дирекционного угла, вычисленного по координатам, обратно пропорционально длине линии.

Пример 3. Измерены длина $à = 59{,}85$ ì и $b = 20{,}10$ ì земельного участка прямоугольной формы со среднеквадратической относительной погрешностью 1:2000. (см. рис. 4.4).

Необходимо найти площадь участка и среднеквадратическую относительную погрешность определения площади.

Решение.

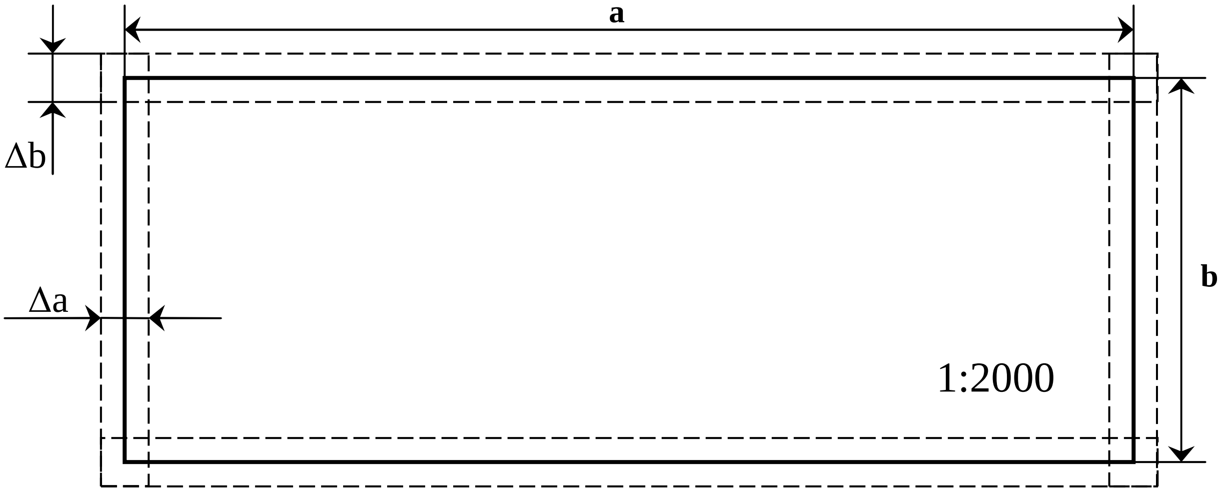
Запишем формулу вычисления площади земельного участка и вычислим ее по известным данным.

$$\mathrm{F} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 1203\ \text{ì}^{2}.$$

Из рис.4.4 видно, что измеренные величины **a** и **b** являются переменными и от точности их измерения зависит точность вычисления земельного участка.

Прологарифмируем полученное выражение $\ln \mathrm{F} = \ln \mathrm{a} + \ln \mathrm{b}$ и найдем полный дифференциал функции *Почему натуральный логарифм?*

$$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{da}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{db}}{\mathrm{b}}.$$



Δa, Δb - погрешности измерения сторон **a** и **b**, которые обусловливают вычисление среднеквадратической относительной погрешности площади участка

Рис. 4.4. Геометрическая интерпретация условий решения задачи

Заменив в полученном выражении дифференциалы среднеквадратическими погрешностями, учитывая формулу (4.21) получим

$$\frac{m_F}{F} = \sqrt{\frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2}}.$$

По условиям задачи

$$\frac{\mathrm{m_a}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{m_b}}{\mathrm{b}} = \frac{1}{2000}.$$

Подставим полученное значение в формулу вычисления среднеквадратической погрешности, найдем

$$\frac{m_F}{F} = \sqrt{\left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(\frac{1}{2000}\right)^2} = \frac{1}{2000}\sqrt{2} = \frac{1}{1414}. \quad ????$$

При необходимости в процессе анализа точности измерений можно перейти к абсолютным погрешностям

$$m_F = \frac{1}{1414}F = \frac{1}{1414}a \cdot b = \frac{1203}{1414} \approx 0{,}9\ \text{ì}^{\,2}.$$

Таким образом, найдена площадь земельного участка и показатели точности проведенных измерений (среднеквадратические погрешности измерений). Полученные показатели могут быть улучшены за счет измерения участка земли более точными приборами, а также увеличением количества измерений.

Рассмотренные выше примеры приводят к понятию «надежность апостериорной оценки точности измерений». Оценка такой надежности связана с определенными трудностями, которые обусловливаются применением специальной технологии измерений и использовании основной теоремы теории погрешностей. Технология предусматривает измерений каждой независимой переменной несколькими сериями и для каждой серии вычисление среднеквадратической погрешности $m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_t$, а затем вычисление среднеквадратической погрешности всех серий измерений. Продифференцируем функцию (4.21) по переменным $\mathrm{m_i}, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{t}}$. В результате получим

$$m_{m_y} = \frac{1}{m_y}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^4 m_1^2 \cdot m_{m_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4 m_2^2 \cdot m_{m_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^4 m_t^2 \cdot m_{m_t}^2} \text{ . ???} \quad (4.22)$$

Используя ранее полученное выражение (3.14) $\mathrm{m}_{\mathrm{m_i}} = \frac{\mathrm{m_i}}{\sqrt{2\mathrm{n}}}$ подставим его в выражение (4.22). Получим зависимость величины $\mathrm{m}_{\mathrm{m_y}}$ от числа измерений

$$m_{m_y} = \frac{1}{m_y}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^4 \frac{m_1^4}{2n_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4 \frac{m_2^4}{2n_2} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^4 \frac{m_t^4}{2n_t}}, \quad (4.23)$$

где n_i $i = \overline{1, t}$ - количество измерений в i-ой серии измерений.

Таким образом, очевидно, что для повышения надежности апостериорной оценки точности измерений, связано с дополнительными трудозатратами по серийному измерению каждого параметра (независимой переменной).