Содержательный модуль 5. Математическая обработка ряда равноточных результатов измерений одной и той же величины

5.1. Простая арифметическая средина и ее свойства

Если $l_i, i = \overline{1, n}$ - ряд независимых результатов равноточных измерений одной и той же величины X, то за наилучшее приближение к ее истинному значению обычно принимают простую арифметическую средину, которая вычисляется по элементарной формуле

$$L = \frac{[l]}{n}, \tag{5.1}$$

где n – количество равноточных измерений, а квадратные скобки обозначают сумму результатов измерений в символах К.Ф.Гаусса.

Такие вычисления являются правомерными, так как при этом учитываются свойства арифметической средины, которые рассмотрим ниже.

Свойства простой арифметической средины

Свойство 1. Если результаты измерений свободны от систематических погрешностей, то простая арифметическая средина этих результатов при увеличении числа измерений в пределе стремится к истинному значению измеряемой величины, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} (L - X) = 0. \tag{5.2}$$

Учитывая свойства систематических погрешностей можно записать

$$\Delta_1 = l_1 - \tilde{O};\ \Delta_2 = l_2 - \tilde{O};\ldots;\ \Delta_n = l_n - \tilde{O}.$$

Используя результаты доказательства основной теоремы теории погрешностей, просуммируем правые и левые части полученных выражений и разделим их на n (см. доказательство теоремы в п.п. 1.4.1). Получим

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - X.$$

Используя выражение (5.1), очевидно полученное равенство можно записать в виде

$$\frac{[\Delta]}{n} = L - X .$$

При $n \to \infty$ левая часть данного выражения на основании свойства компенсации случайных погрешностей (1.10) стремится к нулю. Правая его часть так же стремится к нулю, что доказывает справедливость выражения (5.2).

Следовательно, простая арифметическая средина L является состоятельной оценкой величины X.

Свойство 2. Арифметическая средина независимых равноточных результатов измерений обладает стандартом в $\sqrt{n}$ раз меньше стандарта σ этих измерений.

Представим выражение (5.1) в виде

$$L = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots \frac{l_i}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n},\ i = \overline{1,n} .$$

Воспользовавшись процедурами доказательства основной теоремы теории погрешностей в полученном выражении, возьмем частные производные по каждой переменной l_i

$$\frac{\partial L}{\partial l_i} = \frac{1}{n},$$

тогда формула (4.2) приобретает вид:

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma^2} = \sigma\sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . \tag{5.3}$$

Наглядно, арифметическую средину равноточных результатов измерений можно представить, изобразив графически (см. рис.5.1) области рассеивания погрешностей Δ и Δ_L.

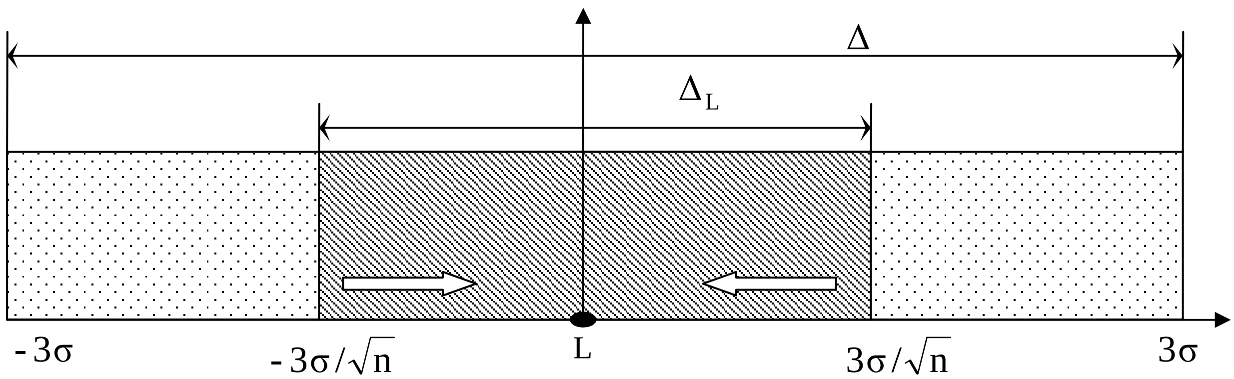

Рис. 5.1. Иллюстрация распределения погрешностей относительно арифметической средины равноточных измерений

Область возможного рассеивания погрешностей Δ_L будет тем уже, чем больше число измерений n. В связи с этим возникает вопрос, является ли увеличение количества измерений эффективной процедурой повышения их точности? При $n \le 10$ на этот вопрос можно ответить положительно. Но при увеличении числа измерений n точность измерений будет изменяться медленней, чем увеличение n. Так, для повышения точности в 4 раза потребуется 16 измерений, в 5 раз – 25, в 6 раз -36, в 10 раз – 100 измерений.

Кроме того, всегда остаются малые по сравнению со случайными систематическими погрешностями, которые не удалось полностью исключить. При достижении некоторого n они становятся преобладающими в величине L и будут препятствовать дальнейшему повышению точности. Таким образом, увеличение числа измерений с одной стороны, увеличивает точность измерений, с другой стороны, большое количество измерений требует больших временных затрат, что может привести к изменению условий и неизбежному нарушению равноточности измерений.

Свойство 3. Если арифметическая средина получена из результатов измерений, свободных от систематических погрешностей, то и сама она не содержит систематической погрешности.

Допустим обратное, т.е. результаты измерений содержат систематические погрешности $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_i, ..., \theta_n$. Тогда на основании (1.9) можно записать:

$$l_1 - X = \theta_1 + \Delta_1;\ l_2 - X = \theta_2 + \Delta_2; \ldots;\ l_n - X = \theta_n + \Delta_n.$$

Сложив правые и левые части полученных уравнений между собой и разделив их на n, получим:

$$L - X = \frac{[\theta_i]}{n} + \frac{[\Delta_i]}{n},\ i = \overline{1,n}.$$

Правая часть полученного уравнения состоит из двух слагаемых, представляющих собой систематическую и случайную погрешности арифметической средины. Отсюда следует, что если $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_n = 0$, то и $\frac{[\theta]}{n}$ будет равен 0, что и доказывает сформулированное выше свойство.

Таким образом, при отсутствии систематических погрешностей арифметическая средина L является не только состоятельной, но и несмещенной оценкой величины X. Такую оценку принято называть **вероятнейшим значением** измеренной величины.

При наличии систематических погрешностей арифметическая средина также будет содержать систематическую погрешность

$$\theta_L = \frac{[\theta_i]}{n},$$

а поэтому не будет обладать свойствами 1 и 3. В этом случае арифметическая средина L хотя и даст наилучшее из возможных приближений к X, но не будет ее вероятнейшим значением.

Ранее было отмечено, что влияние случайных погрешностей можно ослабить надлежащей математической обработкой. Такого рода обработку называют **уравниванием результатов измерений.**

Результаты измерений уравниваются путем введение в вычисления поправок. Под точной поправкой $\bar{\nu}$ будем понимать величину, прибавив которую к результатам измерения l, получим значение X, т.е.

$$l + \bar{\nu} = X. \tag{5.4}$$

Преобразуем полученное выражение и представим его в виде:

$$\bar{\nu} = -(l - X).$$

Из полученного соотношения следует, что точная поправка $\bar{\nu}$ по абсолютной величине равна погрешности, но противоположна ей по знаку. Заметим, что найти точные поправки в большинстве случаев геодезической практики не представляется возможным, поэтому приходится использовать приближенные поправки. Под **приближенной поправкой** ν' будем понимать величину, прибавив которую к результату измерения l, получим некоторое приближенное значение y к X, т.е.

$$l + \nu' = y. \tag{5.5}$$

Прибавив приближенную поправку к результату l_i, получим вероятнейшее значение L, которое называется **вероятнейшей поправкой**, т.е.

$$l_i + \nu'_i = L,\ i = \overline{1,n}. \qquad (5.6)$$

Графическая интерпретация рассмотренных выше поправок иллюстрируется рис. 5.2 и рис.5.3.

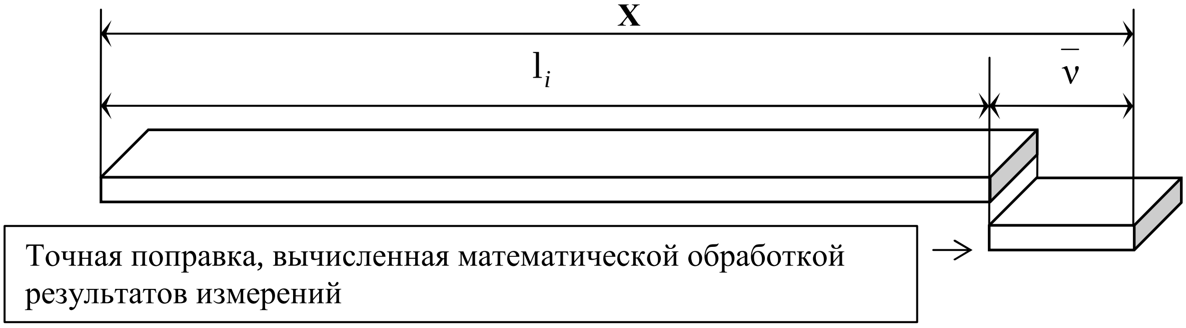

Рис.5.2. Иллюстрация уравнивания результатов измерений точной поправкой

Следующие свойства (свойство 4 и 5) арифметической середины связаны с вероятнейшими поправками.

Свойство 4. Если за вероятнейшее значение измеряемой величины принята арифметическая середина, то сумма вероятнейших поправок равна нулю, т.е.

$$[\nu] = 0. \qquad (5.7)$$

На основании (5.6) запишем следующую систему линейных уравнений

$$l_1 + \nu_1 = L;\ l_2 + \nu_2 = L; \ldots; l_i + \nu_i = L; \ldots;\ l_n + \nu_n = L,\ i = \overline{1,n}. \qquad (5.8)$$

Полученные линейные уравнения просуммируем и запишем их, используя символику К.Ф.Гаусса

$$[l] + [\nu] = n \cdot L. \qquad (5.9)$$

Сравнивая уравнение (5.9) с преобразованным уравнением простой арифметической средины (5.1), а именно, $[l] = n \cdot L$ видно, что $[\nu] = 0$.

Свойство 5. Сумма квадратов вероятнейших поправок, полученных из арифметической средины, всегда меньше суммы квадратов приближенных поправок, полученных для любой другой функции тех же результатов измерений.

На основании выражения (5.5) и рис.5.3 запишем систему линейных уравнений

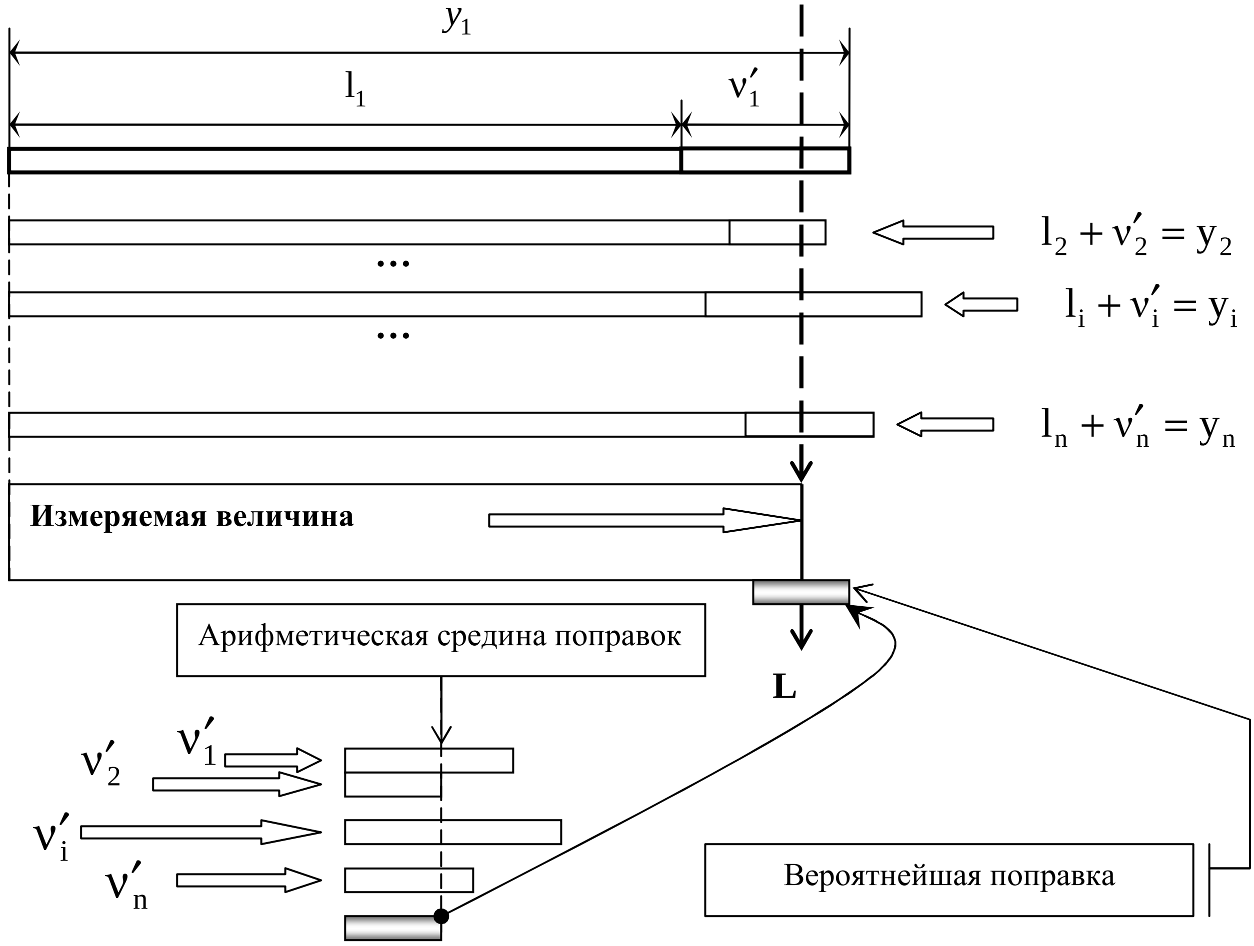

Рис. 5.3. Иллюстрация уравнивания результатов измерений вероятнейшей поправкой

$$l_1 + \nu_1' = y\,; l_2 + \nu_2' = y_2;\ldots; l_i + \nu_i' = y\,;\ldots;\ l_n + \nu_n' = y\,,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{5.10}$$

Вычтем из каждого уравнения полученной системы линейных уравнений (5.10) уравнения системы (5.8) и, сделав соответствующие преобразования, получим:

$$\nu_1' = \nu_1 + (y - L);\ \nu_2' = \nu_2 + (y - L);\ldots;\ \nu_n' = \nu_n + (y - L).$$

Возведем в квадрат правые и левые части полученных уравнений

$$(\nu_1')^2 = (\nu_1 + (y - L))^2;\ (\nu_2')^2 = (\nu_2 + (y - L))^2;\ \ldots.;\ (\nu_n')^2 = (\nu_n + (y - L))^2.$$

Воспользовавшись формулами сокращенного умножения многочленов для квадратов, получим

$$(\nu_1')^2 = (\nu_1)^2 + 2\nu_1 \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$

$$(\nu_2')^2 = (\nu_2)^2 + 2\nu_2 \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$

...

$$(\nu'_n)^2 = (\nu_n)^2 + 2\nu_n \cdot (y - L) + (y - L)^2.$$

Просуммируем полученные выражения и запишем их в символах Гаусса

$$\left[(\nu'_i)^2\right] = \left[\nu_i^2\right] + 2[\nu_i](y - L) + n(y - L)^2.$$

В правой части полученного равенства среднее слагаемое равно нулю в силу того, что $[\nu] = 0$ (см. формулу 5.7). Поэтому

$$\left[(\nu'_i)^2\right] = \left[\nu_i^2\right] + n(y - L)^2. \qquad (5.11)$$

Отсюда вытекает неравенство $\left[(\nu'_i)^2\right] > \left[\nu_i^2\right]$ или $\left[\nu_i^2\right] = \min$, которое и доказывает сформулированное выше свойство.

Таким образом, рассмотрены свойства простой арифметической средины одной из основных характеристик оценивания точности равноточных геодезических измерений. Знания свойств простой арифметической средины позволяет правильно организовать математическую обработку равноточных геодезических измерений.

5.2. Формула расчета эмпирической среднеквадратической погрешности

В п.1.3 рассмотрены количественные критерии и численные примеры апостериорной оценки точности ряда независимых равноточных измерений одной величины по истинным погрешностям. Данный способ является, безусловно, эффективным только тогда, когда в процессе измерений наряду с результатами измерений получены их истинные погрешности. Однако во многих случаях геодезической практики истинные погрешности остаются неизвестными. Поэтому возникает необходимость апостериорной оценки точности измерений по их результатам.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если $l_1, l_2, ..., l_n$ - результаты независимых равноточных измерений, свободных от переменных систематических погрешностей, то величина

$$m^2 = \frac{[\nu^2]}{n-1}, \tag{5.12}$$

где ν - вероятнейшие поправки, есть состоятельное и несмещенное приближение к квадрату стандарта, т.е. дисперсии σ^2 случайных оценок измеряемой величины.

Результаты измерений представим в виде:

$$l_1 = X + \Delta_1 + \bar{\theta};\ l_2 = X + \Delta_2 + \bar{\theta}; \ldots; l_n = X + \Delta_n + \bar{\theta}, \tag{5.13}$$

где $\bar{\theta}$ - постоянная систематическая погрешность, Δ_i - случайная погрешность, X – истинное значение измеряемой величины.

Так как постоянная систематическая погрешность учитывается при вычислении арифметической средины, то справедливо равенство

$$L = X + \Delta_L + \bar{\theta}, \tag{5.14}$$

где Δ_L истинная случайная погрешность арифметической средины.

Вычтем из полученного выражения поочередно каждое из равенств системы уравнений (5.13) и, принимая во внимание систему линейных уравнений (5.8) $L = l_i + \nu_i$, $i = \overline{1,n}$, получим: $\nu_1 = \Delta_L - \Delta_1$; $\nu_2 = \Delta_L - \Delta_2$; …; $\nu_n = \Delta_L - \Delta_n$. Представим эти выражения в виде: $\Delta_1 = \Delta_L - \nu_1$; $\Delta_2 = \Delta_L - \nu_2; \ldots; \Delta_n = \Delta_L - \nu_n$.

Возведем, левые и правые части в квадрат, а результаты просуммируем:

$$[\Delta^2] = n\Delta_L^2 - 2\Delta_L[\nu] + [\nu^2].$$

Подставим в полученное выражение формулу (5.7), т.е. $[\nu] = 0$, получим:

$$[\Delta^2] = n\Delta_L^2 + [\nu^2].$$

Преобразуя это выражение получим: $[\nu^2] = [\Delta^2] - n\Delta_L^2$. В правой части вынесем за скобку n и разделим обе части уравнения на $n-1$. В результате получим:

$$\frac{[\nu^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_L^2\right\}. \tag{5.15}$$

Сначала докажем, что правая часть полученного выражения является состоятельной оценкой, т.е. дисперсией. Для этого перейдем к пределу при $n \to \infty$. Воспользуемся методами математического анализа, в частности, правилами Лопиталя при раскрытии неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, которое составляющую $\frac{n}{n-1}$ правой части уравнения (5.15) превращает в единицу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Вторая составляющая правой части уравнения (5.15) в силу первого свойства простой арифметической средины при $n \to \infty$ стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_L^2 \right\} = 0.$$

Тогда в силу свойства рассеивания (1.12) случайных погрешностей левую часть уравнения (5.15) справедливо приравнять к значению дисперсии σ^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\nu^2]}{n-1} = \sigma^2.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы предположим, что выполнено t серий, независимых равноточных измерений

$$l'_1, l'_2, ..., l'_n;\ l''_1, l''_2, ..., l''_n;\ ...;\ l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, ..., l_n^{(t)}.$$

Для каждой серии измерений запишем формулу для расчета среднеквадратической погрешности $m_i^2 = \frac{[\nu_i^2]}{n-1}$, $i = \overline{1, n}$ (см. формулу 5.12). Правые части этих формул соответствуют левой части выражения (5.15). Заменив их на m_i^2 получим

$$m_i^2 = \frac{n}{n-1} \left\{ \frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_{L_i}^2 \right\},\ i = \overline{1, n},$$

где Δ - погрешность каждого измерения в серии, а Δ_{L_i} - погрешность i-й серии измерений. Просуммируем полученные выражения и получим формулу

$$[m^2] = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^{t} \left\{ \frac{[\Delta^2]_j}{n} - \Delta_{L_i}^2 \right\}.$$

Особенность записи полученного выражения заключается в том, что оно записано на смешанном математическом языке, т.е. с использованием формального представления символа суммы «[ ]» Гауссом, а также общепринятого в математике символа суммы «$\sum$ ».

Разделим почленно все на t и переходя к пределу при $t \to \infty$, будем иметь

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left[m^2\right]}{t}=\frac{n}{n-1}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t}\left[\Delta^2\right]_j}{nt}-\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t}\Delta_{L_i}^2}{t}\right\}. \qquad (5.16)$$

Рассмотрим пределы в фигурных скобках выражения (5.16). Первый предел согласно свойству рассеивания равен σ^2, так как в числителе стоит сумма квадратов случайных погрешностей, а в знаменателе их количество. Второй предел является пределом суммы квадратов случайных погрешностей арифметической середины, деленных на их число, который согласно свойству рассеивания равен σ_L^2 и, принимая во внимание второе свойство арифметической середины (см. формулу 5.3), получим $\sigma_L^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

Сделав соответствующие подстановки, находим:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left[m^2\right]}{t}=\frac{n}{n-1}\cdot\left(\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2.$$

Следовательно, оценка (5.11) является несмещенной. Таким образом, получено состоятельное и несмещенное приближение к стандарту σ, что и требовалось доказать.

Сохраняя в (5.11) то же обозначение среднеквадратической погрешности m, как и в (3.6), чтобы их как-то различать, приближение (5.11) будем называть **эмпирической среднеквадратической погрешностью.**

5.3. Последовательность математической обработки ряда равноточных измерений одной и той же величины

Прежде чем непосредственно приступить к рассмотрению последовательности математической обработки равноточных измерений выведем несколько контрольных и вспомогательных формул.

Для вычисления простой арифметической средины на практике вместо формулы (5.1) удобно использовать формулу имеющую вид:

$$L = L_0 + \frac{\delta l_i}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.17}$$

где L_0 - так называемый «условный нуль», т.е. целесообразно выбранное приближенное значение, чтобы разности

$$\delta l_i = l_i - L_0 \to \min, \tag{5.18}$$

были малыми величинами, δ - некоторая погрешность l_i измерения. Графическая интерпретация поиска арифметической средины с использованием «условного нуля иллюстрируется рис.5.4.

Рис.5.4. Иллюстрация нахождения простой арифметической средины с использованием «условного нуля»

Действительно, в соответствии с (5.17) и (5.18) можно записать

$$L = L_0 + \frac{[l - L_0]}{n} = L_0 + \frac{[l] - nL_0}{n} = \frac{[l]}{n}.$$

В результате получена формула для вычисления простой арифметической средины (5.1). Далее для вычисления по формуле (5.11) эмпирической средне-квадратической погрешности необходимо сначала по преобразованной формулам (5.8) вычислить вероятнейшие поправки

$$\nu_i = L - l_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Теоретической проверкой правильности вычисления арифметической средины с использованием «условного нуля» измерений может служить четвертое свойство арифметической средины. Однако практика показывает, что при вычислении суммы вероятнейших поправок по формуле (5.7) процедура округления полученных результатов дает смещенное значение L', отличающееся от значения L на малую величину β, т.е.

$$\beta = L' - L \tag{5.19}$$

и смещенные поправки, также отличаются от вероятнейших поправки на величину β

$$\nu_i' = L' - l_i + \beta, \; i = \overline{1,n}. \tag{5.20}$$

Вышесказанное проиллюстрируем рис.5.5.

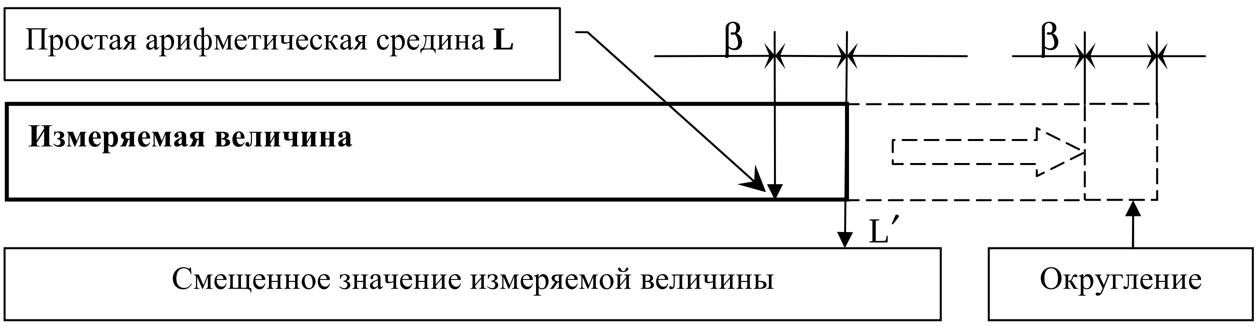

Рис.5.5. Иллюстрация смещения измеряемой величины за счет округления вероятнейших поправок

Просуммируем все от $i = \overline{1,n}$ выражения (5.20), получим следующую формальную запись:

$$[\nu'] = nL - [l] + n\beta.$$

Опираясь на преобразования, которые сделаны при доказательстве теоремы (см. п.п.1.5.2) можно записать

$$[\nu'] = n\beta. \tag{5.21}$$

В соответствии с пятым свойством арифметической средины сумма приближенных поправок измеренной величины $[\nu']$ больше суммы вероятнейших поправок $[\nu]$. Формально можно записать $[\nu'] > [\nu]$.

Для нахождения несмещенного значения измеряемой величины воспользуемся выражением (5.11), которое получено при обосновании пятого свойства простой арифметической средины (см. п.п.5.1). Заменим в этом выражении **у** на L':

$$\left[(\nu')^2\right] = \left[\nu^2\right] + n(L' - L)^2. \tag{5.22}$$

Простые преобразования формул (5.19) и (5.21) позволяют записать равенство

$$L' - L = \beta = \frac{[\nu']}{n}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (5.22) имеем:

$$\left[\nu^2\right] = \left[(\nu')^2\right] - \frac{[\nu']^2}{n}. \tag{5.23}$$

Получена сумма квадратов вероятнейших поправок измеряемой величины равна разности суммы квадратов приближенной поправки и средней величины этих же поправок.

Для проверки правильности математических построений снова воспользуемся формулой (5.11), заменив в ней ν' на δl, а **у** на L_0, учитывая при этом, что $L_0 - L = \dfrac{[\delta l]}{n}$, получим:

$$\left[\nu^2\right] = \left[\delta^2 l\right] - \frac{[\delta l]^2}{n}. \tag{5.24}$$

Сравнивая правые части выражений (5.23) и (5.24) видно, что они имеют один и тот же физический смысл.

Оценим надежность вычислений сделанных по формуле (5.12), так как эмпирическая среднеквадратическая погрешность является величиной приближенной. Такую оценку можно сделать используя формулу

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{5.25}$$

Для определения среднеквадратической погрешности арифметической середины L воспользуемся обоснованием второго свойства простой арифметической средины, а именно формулой (5.3). Заменим в ней неизвестные стандарты σ и σ_L среднеквадратическими погрешностями m и M, получим:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{5.26}$$

На основании полученных формул (5.25) и (5.26) надежность среднеквадратической величины M можно оценить используя формулу

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{n}}. \tag{5.27}$$

Рассмотренные выше математические построения приводят к следующей последовательности математических процедур по обработке ряда равноточных измерений одной и той же величины.

Процедура 1. Анализ ряда результатов равноточных измерений с целью выявления и отбрасывания грубых ошибок.

Процедура 2. Эвристическая процедура по нахождению условного нуля L_0.

Процедура 3. Процедура вычисления арифметической средины, которая состоит из округления полученных результатов и определения величины смещения β по формуле (5.19).

Процедура 4. Вычисление смещения, которая состоит из округления вероятнейших поправок ν' и их суммирования.

Процедура 5. Контрольная проверка правильности выполненных вычислений. Проверяется соотношение величины суммы вероятнейших поправок ($[\nu']$), полученных процедурой 4, и произведения количества измерений на величину смещения $n\beta$. Если существует неравенство $[\nu'] < n\beta$, то вычисления сделаны правильно.

Процедура 6. Вычисление значений $(\delta l_i)^2$ и $(\nu_i')^2$ для каждого измерения $i = \overline{1, n}$ и нахождение их сумм.

Процедура 7. Вычисление эмпирической среднеквадратической погрешности m по формуле (5.12), сначала на основе результатов вычисления $[\nu^2]$, полученных по формуле (5.23), а затем на основе результатов вычисления той же величины по формуле (5.24). Оба результата должны совпасть в пределах точности измерений.

Процедура 8. Оценивание надежности вычисления приближенного значения эмпирической среднеквадратической погрешности результатов измерений по формуле (5.25).

Процедура 9. Вычисление среднеквадратической погрешности простой арифметической средины измеряемой величины L по формуле (5.26).

Процедура 10. Оценка надежности полученных результатов измерения осуществляется по формуле (5.27).

Используя приведенные выше процедуры рассмотрим пример математической обработки ряда независимых равноточных измерений величины горизонтального угла, сделанных 18-ю приемами теодолитом 2Т5.

Пример.

Результаты измерений представлены рядом следующим результатов измерений:

$$L_1 = 115\ 14\ 42.1; \quad L_7 = 115\ 14\ 29.8; \quad L_{13} = 115\ 14\ 32.0;$$

$$L_2 = 115\ 14\ 35.2; \quad L_8 = 115\ 14\ 29.1; \quad L_{14} = 115\ 14\ 41.4;$$

$$L_3 = 115\ 14\ 35.4; \quad L_9 = 115\ 14\ 35.3; \quad L_{15} = 115\ 14\ 21.5;$$

$$L_4 = 115\ 14\ 34.4; \quad L_{10} = 115\ 14\ 39.0; \quad L_{16} = 115\ 14\ 34.6;$$

$$L_5 = 115\ 14\ 28.7; \quad L_{11} = 115\ 14\ 32.1; \quad L_{17} = 115\ 13\ 82.9 \to \min;$$

$$L_6 = 115\ 14\ 37.3; \quad L_{12} = 115\ 14\ 27.5; \quad L_{18} = 115\ 15\ 00.1 \to \max.$$

Выполним **первую процедуру** и отбросим результаты измерений, имеющих минимальное L_{17} и максимальное L_{18} значения.

Учитывая рекомендации **второй процедуры** за значение условного нуля примем величину $L_0 = 115^\circ\, 14'\, 30''$. Найдем значение величин $\delta l_i = L_0 - l_i$ и их просуммируем. Результаты выполнения двух процедур табулируем и представим в табл. 5.1.

Выполняя **третью процедуру** вычислим по формуле (5.17) простую арифметическую средину округлим полученный результат до $0.1''$ и определим величину смещения β по формуле (5.19).

Таблица 5.1

Измерения и промежуточные результаты их математической обработки

№ п/п	Результаты измерений l_i	δl_i (c)	δl_i^2	ν'_i (c)	$(\nu'_i)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	115 14 42.1	12.1	146.4	-8.6	74.0
2	35.2	5.2	27.0	-1.7	2.9
3	35.4	5.4	29.2	-1.9	3.6
4	34.4	4.4	19.4	-0.9	0.8
5	28.7	-1.3	1.7	4.8	23.0
6	37.3	7.3	53.3	-3.8	14.4
7	29.8	-0.2	0	3.7	13.7
8	29.1	-0.9	0.8	4.4	19.4
9	35.3	5.3	28.1	-1.8	3.2
10	39.0	9.0	81.0	-5.5	30.2
11	32.1	2.1	4.4	1.4	2.0
12	27.5	-2.5	6.2	6.0	36.0
13	32.0	2.0	4.0	1.5	2.2
14	41.4	11.4	130.0	-7.9	62.4
15	21.5	-8.5	72.2	12.0	144.0

16	34.6	4.6	21.2	-1.1	1.2
	$L_0 = 115^\circ 14' 30''$	$[\delta l] = 55.4$	$[(\delta l)^2] = 624.9$	$[\nu'] = 0.6$	$[(\nu')^2] = 4330$
	$[\delta l]\ /n = 3.46''$			$n\beta = 0.64$	
	$L' = 115^\circ 14' 33.5$				
	$\beta = 0.04$				

В соответствии с **четвертой процедурой** вычислим смещение, которое образуется за счет округления вероятнейших поправок ν' и их просуммируем (см. столбец 5 табл. 5.1).

Выполним контрольную, **пятую процедуру**, и сравним по величине $[\nu']$ и $n\beta$. Результат сравнения показывает, что величина $[\nu']$на 0.04 единицы меньше величины $n\beta$. Следовательно, вычисления сделаны правильно.

Шестая процедура обеспечивает вычисление квадратов $(\delta l_i)^2$, $(\nu_i')^2$ и определение их сумм, которые заносятся в 4 и 6 столбцы табл. 5.1.

В соответствии с **седьмой процедурой** сделаем вычисление значений эмпирической среднеквадратической погрешности m сначала по формулам (5.12) и (5.23), а затем используя формулы (5.12) и (5.24).

Сделаем элементарные преобразования формулы (5.12) и подставим в нее два раза численные значения, полученные при вычислении $[\nu^2]$ по формулам (5.23) и (5.24), получим:

- результат вычисления эмпирической среднеквадратической погрешности с использованием численных расчетов по формуле (5.23)

$$m = \sqrt{\frac{433 - \frac{0.6^2}{16}}{16-1}} = 5.4'';$$

- результат вычисления эмпирической среднеквадратической погрешности с использованием численных расчетов по формуле (5.24)

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{624 - \frac{55.4^2}{16}}{16 - 1}} = 5.4''.$$

Равенство полученных результатов показывает правильность математических построений и вычислений.

Оценивание надежности вычисления приближенного значения эмпирической среднеквадратической погрешности результатов измерений осуществляется **восьмой процедурой** с использованием формулы (5.25). Подставляя в формулу численное значение $\mathrm{m} = 5.4''$, получим:

$$\mathrm{m_m} = \frac{5.4}{\sqrt{2(16-1)}} \approx 1'',$$

что свидетельствует о высокой надежности приближенного оценивания эмпирической среднеквадратической погрешности результатов измерений.

Девятой процедурой вычисляется среднеквадратическая погрешность нахождения простой арифметической средины измеряемой величины L. Подставляя в формулу (5.26) полученные численные значения, имеем:

$$\grave{\mathrm{I}} = \frac{5.4}{\sqrt{16}} = 1.4''.$$

Окончательной, **десятой процедурой**, осуществляется оценивание надежности полученных результатов измерений. Для этого вычисляется по формуле (5.27) значение среднеквадратической погрешности результатов измерений

$$\mathrm{m_M} = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25'',$$

которое сравнивается с суммарной вероятнейшей погрешностью. В нашем случае среднеквадратическая погрешность почто в два с половиной раза меньше суммарной вероятнейшей погрешности, что свидетельствует об удовлетворительной надежности полученных результатов.

Таким образом, на основании ранее рассмотренных понятий простой арифметической средины и ее свойств, а также теоремы о нахождении эмпирической среднеквадратической погрешности сформирована строгая последовательность математической обработки ряда равноточных результатов измерений. Математическая обработка представляет собой десять процедур, обеспечивающих как вычисления необходимых величин, так и контроль за правильностью их выполнения. Приводится конкретный пример математической обработки результатов измерения горизонтального угла, что показывает работоспособность сформированной последовательности математических построений.