Содержательный модуль 1.6

Неравноточные измерения

6.1. Вес как специальная мера относительной точности результатов неравноточных измерений

Приближенными значениями стандарта являются среднеквадратическая и эмпирическая среднеквадратическая погрешности измеряемой величины. Они же являются абсолютными количественными мерами точности результатов измерений и их функций. При уравнивании неравноточных измерений возникает необходимость ввести специальную меру точности. В качестве такой меры принят вес, формула вычисления которого (1.13) приведена в п.п. 1.2.5.

Рассмотрим подробно физический смысл данного понятия.

Вес это специальная характеристика относительной точности измерений и их функций, вычисляемая как величина, обратно пропорциональная квадрату стандарта, т.е.дисперсии результатов случайных измерений.

Если существует ряд неравноточных результатов измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, точность которых характеризуется стандартами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, соответственно, то веса характеризующие их относительную точность, определяются отношениями

$$p_1 = \frac{c}{\sigma_1^2}; p_2 = \frac{c}{\sigma_2^2}; \ldots; p_n = \frac{c}{\sigma_n^2}, \qquad (6.1)$$

где **c** – общий коэффициент пропорциональности.

Отсюда следует, что выбор **c** равным квадрату стандарта σ_i^2 некоторого результата измерения (реального или воображаемого) равносилен принятию веса этого результата за единицу.

Обозначим стандарт результата измерения, обладающего весом, равным единице символом $\bar{\sigma}$.

Тогда уравнения (6.1) записать в следующем виде:

$$p_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1^2}; p_2 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_2^2}; \ldots; p_n = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_n^2}, \qquad (6.2)$$

Величину $\bar{\sigma}$ принято называть стандартом единицы веса, а его приближенные значения соответственно среднеквадратической погрешностью единицы веса и эмпирической среднеквадратической погрешностью единицы веса.

Как следует из приведенных выше рассуждений и выражений (6.1) и (6.2), результаты равноточных измерений, обладают одинаковыми стандартами, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$ будут иметь одинаковые веса, которые можно принять равными единице $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$.

Очевидно, что результаты неравноточных измерений, полученные в разных условиях, будут иметь неравные веса. Определим значение простой арифметической середины L независимых неравноточных результатов измерений. Для этого сделаем следующие математические преобразования. На основании формальных соотношений (6.1) запишем пропорцию

$$\frac{p_L}{p} = \frac{\sigma^2}{\sigma_L^2}, \tag{6.3}$$

где σ - стандарт отдельного измерения, σ_L - стандарт простой арифметической середины. Учитывая результаты обоснования второго свойства простой арифметической середины, а именно формальные преобразования (5.3) можно записать

$$\sigma_L = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Подставляя значение σ_L в пропорцию (6.3), получим

$$p_L = np. \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что вес арифметической середины независимых неравноточных результатов измерений в n раз больше веса отдельного результата.

Предположив, что стандарт единицы веса равен среднеквадратической погрешности единицы веса (см. формулу (6.2)), формула (6.4) примет вид:

$$p_L = n. \tag{6.5}$$

Таким образом, вес арифметической середины независимых результатов измерений единичного веса равен числу этих результатов. При обработке результатов однородных измерений их веса являются безразмерными величинами. Если же результаты измерений имеют разную размерность, например, длины линии измеренных в метрах, а горизонтальные углы в секундах, то вес будет именованной величиной $p = \frac{\grave{\imath}^{\,2}}{\tilde{n}^{2}}$.

6.2. Веса функций результатов неравноточных измерений

Для оценки относительной точности функции независимых результатов неравноточных измерений воспользуемся формулой, вытекающей из доказательства основной теоремы теории погрешности, а именно формулой (4.2)

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}\ .$$

Преобразуем полученную формулу с целью перехода в ней от стандартов σ к весам p. Для этого возведем левую и правую часть формулы (4.2) в квадрат и подставим вместо квадратов стандартов σ_i^2 выражения (6.1) $\sigma_i^2 = \frac{c}{p_i}$, и сократив левую и правую части на общий множитель c, получим формальную запись

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_t}. \qquad (6.6)$$

Рассмотрим простейший частный случай использования формулы (6.6) для функции с одной переменной $y = cx$. Подставим эту формулу в (6.6) и сделав соответствующие преобразования, получим $\frac{1}{p_y} = c^2 \frac{1}{p_x}$ или $p_y = \frac{p_x}{c^2}$. Применив это равенство к каждому измерению $u = l_i \cdot \sqrt{p_i}$, где l_i - результат i-го измерения, а p_i - его вес, получим:

$$p_u = \frac{p_i}{\left(\sqrt{p_i}\right)^2} = 1. \qquad (6.7)$$

Следовательно, из этих математических построений вытекает, что если умножить результат измерений на корень квадратный из его веса, то вес произведения $l_i \cdot \sqrt{p_i}$ будет равен единице, а его стандарт равен стандарту единицы веса $\bar{\sigma}$.

Из пропорции (6.2), полученной на основе (6.1) запишем $\frac{\sigma_y^2}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{p_y}$. Преобразуя эту формулу найдем вес p_y и стандарт σ_y функции $y = cx$, $p_y = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_y^2}$,

$$\sigma_y = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{p_y}}. \tag{6.8}$$

На основе несложных математических преобразований получены формулы, которые связывают вес функции результатов неравноточных измерений с ее точностными характеристики.

Таким образом, для того чтобы найти значение стандарта какого-либо результата измерения или его функции, достаточно стандарт единицы веса разделить на корень квадратный из веса этого результата или его функции.

При определении весов на практике возможны два случая:

1. Стандарты результатов измерений известны и могут быть определены теоретически. В этом случае для расчета весов используют выражения (6.1), (6.2) и (6.3).

2. В случае, если стандарты неизвестны, то весам можно дать приближенную оценку, подставляя в формулу (6.1) приближенные значения средних или эмпирических среднеквадратических погрешностей, т.е.

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \ i = \overline{1, n}. \tag{6.9}$$

Рассмотрим примеры математических построений для расчета весов в геодезической практике.

Пример 1. Математические преобразования для расчета веса суммы углов теодолитного хода, измеренных в одинаковых условиях.

Особенностью решения этой задачи является, то что измерения углов теодолитного хода являются равноточными, т.е. их веса $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$. Учитывая эту особенность формула (6.6) примет следующий вид:

$$\frac{1}{p_{[\beta]}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}.$$

Подставляя в формулу вместо p_i, $i = \overline{1, n}$ единичные значения, получим:

$$p_{[\beta]} = \frac{1}{n}\ , \qquad (6.10)$$

т.е. вес суммы углов теодолитного хода обратно пропорционален количеству измеренных углов данного хода.

Пример 2. Математические преобразования для расчета веса линейных измерений полигонометрического (теодолитного) хода. Графическая интерпретация линейных измерений теодолитного хода иллюстрируется рис. 6.1.

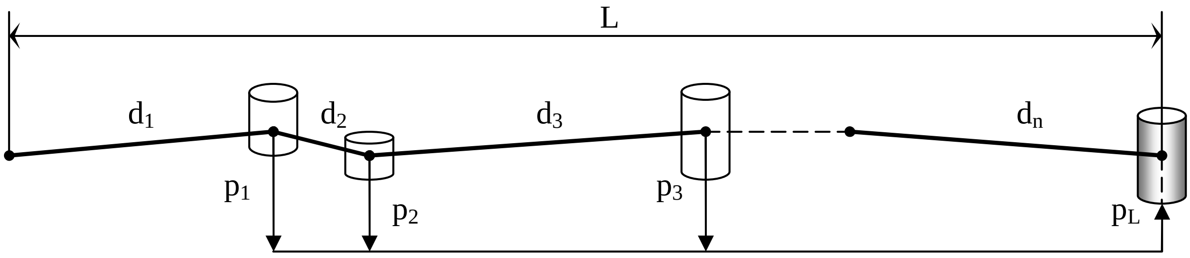


Рис.6.1. Иллюстрация к примеру 2

В основу математических преобразований для расчета веса линейных измерений полигонометрического хода положен известный в геодезии факт, что длина хода равна сумме длин его сторон. Этот факт математически можно записать в виде уравнения:

$$L = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = [d]. \qquad (6.11)$$

Кроме того, известно, что стандарт длинны линии при отсутствии систематических погрешностей пропорционален корню квадратному из длины линии:

$$\sigma_d = \mu_d \sqrt{d}\ ,$$

где μ_d - коэффициент случайного влияния.

Тогда подставляя в выражения (6.2) σ_d для каждой линии получим формулы для вычисления веса измеренных линий:

$$p_1 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2 d_1}, \quad p_2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2 d_2}, \ldots, p_n = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2 d_n}\ . \tag{6.12}$$

В полученных выражениях выделим постоянную величину и обозначим ее:

$$c = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2},$$

тогда на основании (6.3) и с учетом выражений (6.11) и (6.12) получим:

$$\frac{1}{p_L} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{c}\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_n\right) = \frac{[d]}{c} = \frac{L}{c}.$$

Упростив полученное выражение, имеем:

$$p_L = \frac{c}{L}. \tag{6.13}$$

Таким образом, вес линейных измерений вытянутого полигонометрического хода обратно пропорционален длине хода.

Пример 3. Математические преобразования для расчета веса превышения нивелирного хода, проложенного в равнинной местности.

Если ход проложен в равнинной местности при среднем расстоянии между рейками $\bar{l}$, число станций в ходе будет равно $n \approx \frac{L}{\bar{l}}$.

Учитывая формулу (6.6) запишем:

$$\frac{1}{p_L} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}, \tag{6.14}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$- веса измеренных превышений на станции. Пологая, что на всех станциях превышения измерены в одинаковых условиях (равноточно), т.е. $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, выражение (6.14) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\tilde{p}_L} = \frac{L}{\bar{l}} = \frac{1}{\tilde{p}}.$$

Обозначив $\tilde{n} = \bar{l}p$, получим $\frac{1}{p_L} = \frac{L}{c}$, откуда следует

$$p_L = \frac{c}{L}. \qquad (6.15)$$

Следует заметить равенство формул (6.13) и (6.15), т.е. вес превышения нивелирного хода, проложенного в равнинной местности, также как и при измерениях вытянутого полигонометрического хода (см. пример 2), обратно пропорционален длине хода.

По аналогии можно доказать, что вес превышения нивелирного хода, проложенного в пересеченной местности, обратно пропорционален количеству станций, т.е.

$$p_n = \frac{c}{n}. \qquad (6.16)$$

Таким образом, рассмотрены особенности математических преобразований, обеспечивающих оценку относительной точности функции независимых результатов неравноточных измерений, а так же примеры математических построений, позволяющих рассчитывать веса функциональных зависимостей, полученных из геодезической практики.

6.3. Общая арифметическая средина и ее свойства

Если $l_1, l_2, \dots, l_n$ - независимые результаты измерений одной и той же величины X, относительная точность которых характеризуется соответственно весами $p_1, p_2, \dots, p_n$ (измерения неравноточные), то за наилучшее приближенные к величине X принимают общую арифметическую средину

$$L = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \qquad (6.17)$$

Величину L часто называют средней взвешенной.

Полученную формулу (6.17) можно применять лишь тогда когда отдельные результаты измерений соизмеримы и имеют величины одного порядка. Нельзя усреднять результаты, полученные при существенно различающихся условиях измерений, например, нельзя усреднять длину линии, измеренной один раз обычной рулеткой, а другой раз светодальномером, или величину угла, измеренного один раз техническим теодолитом, а другой раз высокоточным теодолитом. Исходя из вышесказанного следует, что на веса в формуле (6.17) должны быть наложены ограничительные условия, которые можно выразить неравенством:

$$c_1 \le p_i \le c_2,\ i = \overline{1,n}, \tag{6.18}$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные.

По аналогии с математическими построениями проделанными в п.п.5.1 рассмотрим основные свойства общей арифметической средины независимых неравноточных результатов измерений.

Свойства общей арифметической средины

Свойство 1. Вес общей арифметической средины независимых неравноточных результатов измерений равен сумме весов этих измерений.

Для математического обоснования этого утверждения формулу (6.17) представим в виде:

$$L = \frac{p_1 l_1}{[p]} + \frac{p_2 l_2}{[p]} + \cdots + \frac{p_n l_n}{[p]}.$$

Рассматривая L как функцию независимых переменных $l_1, l_2, \ldots, l_n$, для определения ее веса, нейдем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{p_i}{[p]},\ i = \overline{1,n},$$

и подставим их в формулу (6.6). В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{p_L} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + \frac{p_2^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{[p]^n} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{[p]}{[p]^2}.$$

После сокращений и преобразования полученной формулы, имеем:

$$p_L = [p], \tag{6.19}$$

что формально показывает правильность смыслового содержания свойства 1. Соответственно стандарт общей арифметической средины, учитывая формулу (6.8), будет равен

$$\sigma_L = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{[p]}}. \tag{6.20}$$

Свойство 2. Если общая арифметическая средина получена из результатов измерений, свободных от систематических погрешностей, то и сама она не содержит систематической погрешности.

Данное свойство аналогично третьему свойству простой арифметической средины, которое рассматривалось для ряда равноточных измерений в п.п.5.1. Поэтому справедлива запись:

$$l_1 - X = \theta_1 + \Delta_1;\ l_2 - X = \theta_2 + \Delta_2;\ldots;\ l_n - X = \theta_n + \Delta_n.$$

Умножив каждое из этих равенств на соответствующий вес p_i, $i = \overline{1,n}$, сложив почленно и разделив на $[p]$, получим

$$p_1 l_1 - p_1 X = p_1\theta_1 + p_1\Delta_1;\ p_2 l_2 - p_2 X = p_2\theta_2 + p_2\Delta_2;\ldots;p_n l_n - p_n X = p_n\theta_n + p_n\Delta_n,$$

$$\frac{[pl]}{[p]} - X = \frac{[p\theta]}{[p]} + \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Правая часть полученного равенства состоит из двух частей, соответствующих систематической и случайной погрешности общей арифметической средины. Отсюда следует, что если $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ равна нулю, то и $[p\theta]$ будет равна нулю, что и доказывает сформулированное выше свойство.

Свойство 3. Если результаты неравноточных измерений свободны от систематических погрешностей, то их общая арифметическая средина при увеличении числа измерений в пределе стремится к истинному значению измеряемой величины.

По аналогии с первым свойством простой арифметической средины для ряда равноточных результатов измерений запишем:

$$\lim_{n\to\infty}(L - X) = 0. \tag{6.21}$$

На основании ограничительных условий на измерения (6.18) запишем следующие неравенства $c_1 < p_1;\ c_2 < p_2;\ldots;\ c_n < p_n$. Сложим правые и левые их части и получим новое неравенство $nc_i < [p_i]$, $i = \overline{1,n}$. Откуда можно заключить, что при $n \to \infty$ имеет место предел:

$$\lim_{n\to\infty}[p] = \infty. \tag{6.22}$$

Из полученного выражения (6.22) и формулы (6.20) следует, что стандарт σ_L будет стремиться к нулю, т.е. при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_L = 0. \tag{6.23}$$

Это означает, что общая арифметическая средина L будет стремиться к постоянной величине, а так как постоянная величина не может содержать систематической погрешности, то она должна быть равна измеряемой величине X.

На основании третьего и второго свойства можно сделать заключение, что при отсутствии систематических погрешностей общая арифметическая средина L является состоятельной и несмещенной оценкой X.

Свойство 4. Сумма произведений уклонений результатов измерений от общей арифметической средины

$$\nu_i = L - l_i,\ i = \overline{1,n} \tag{6.24}$$

на соответствующие им веса равна нулю, т.е.

$$[p\nu] = 0. \tag{6.25}$$

Умножим почленно каждое выражение из системы уравнений (6.24) на соответствующие веса p_i, $i = \overline{1,n}$ и суммируя полученные таким способом равенства, будем иметь:

$$[p\,\nu] = [p]L - [p\,l].$$

Учитывая формулу для нахождения общей арифметической средины (6.17) $L = \frac{[pl]}{[p]}$ подставляя ее в полученное выражение и преобразовывая, будем иметь:

$$[p]L = [pl].$$

Подставляя в полученную формулу выражение (6.25) получим $[p]L = 0$, что и требовалось доказать.

Остается обосновать, что из всех возможных функций, полученных в результате неравноточных измерений этим свойством обладает только общая арифметическая средина. Для этого возьмем отличную от (6.24) функцию y и запишем для нее систему уравнений:

$$\nu_i' = y - l_i,\ i - \overline{1,n}. \tag{6.26}$$

Вычитая из формулы (6.26) выражение (6.24), получим разность уклонений

$$\nu_1' - \nu_1 = y - L;\ \ \nu_2' - \nu_2 = y - L; \ldots;\ \nu_n' - \nu_n = y - L. \tag{6.27}$$

Умножим каждое из равенств на соответствующие веса p_i, $i = \overline{1,n}$, и затем просуммируем почленно, получим формулу $[p\nu'] - [p\nu] = [p](y - L)$, которую, учитывая (6.25) можно преобразовать в соотношение вида: $[p\nu'] = [p](y - L)$. Отсюда следует, что $[p\nu']$ будет равно нулю тогда и только тогда, когда $y = L$, что и требовалось доказать.

Свойство 5. Сумма произведений весов на квадраты уклонений от общей арифметической средины всегда меньше чем сумма произведений весов на квадраты уклонений от любой другой функции тех же результатов измерений, т.е.

$$\left[p\nu^2\right] = \min, \tag{6.28}$$

что соответствует неравенству

$$\left[p\nu^2\right] < \left[p(\nu')^2\right]. \tag{6.29}$$

Для доказательства полученного неравенства преобразуем формулу (6.27) к виду:

$$\nu_1' = \nu_1 + (y - L);\ \nu_2' = \nu_2 + (y - L);\ldots;\ \nu_n' = \nu_n + (y - L).$$

Возведем левые и правые части этих равенств в квадрат и приведя их в соответствие с формулами сокращенного умножения для многочленов, получим:

$$(\nu')_1^2 = \nu_1^2 + 2\nu_1(y - L) + (y - L)^2;$$

$$(\nu')_2^2 = \nu_2^2 + 2\nu_2(y - L) + (y - L)^2;$$

$$\ldots$$

$$(\nu')_n^2 = \nu_n^2 + 2\nu_n(y - L) + (y - L)^2.$$

Затем умножим левые и правые части полученных уравнений на соответствующие веса p_i, $i = \overline{1,n}$, полученные выражения почленно сложим. В результате получим формулу $\left[p(\nu')^2\right] = \left[p\nu^2\right] + 2[p\nu](y - L) + [p](y - L)^2$, которая с учетом равенства (6.25) примет вид: $\left[p(\nu')^2\right] = \left[p\nu^2\right] + [p](y - L)^2$. Откуда следует очевидное неравенство (6.29), что и подтверждает справедливость формулировки пятого свойства общей арифметической средины результатов неравноточных измерений.

Таким образом, учитывая отдельные математические построения нахождения простой арифметической средины для равноточных измерений, рассмотрены свойства общей арифметической средины одной из основных характеристик оценивания точности неравноточных геодезических измерений. Знания свойств общей арифметической средины позволяет правильно и корректно организовать математические вычисления в процессе обработки неравноточных геодезических измерений.

6.4. Формула эмпирической среднеквадратической погрешности единицы веса

В основу математических построений, приводящих к формальному представлению эмпирической среднеквадратической погрешности единицы веса измерений положим обоснование первого свойства общей арифметической средины, а именно формулу (6.20). По аналогии со случаем равноточных измерений (см. п.п.п. 1.5.3, формула (5.26)) неизвестный стандарт измерений σ_L и стандарт единицы веса $\bar{\sigma}$ заменим среднеквадратическими погрешностями, получим:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \qquad (6.30)$$

где M – среднеквадратическая погрешность общей арифметической средины, μ - среднеквадратическая погрешность единицы веса.

Для оценки точности общей арифметической средины кроме весов необходимо по результатам измерений найти среднеквадратическую погрешность единицы веса μ.

Для решения поставленной задачи докажем следующую теорему.

Теорема. Если $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ уклонения от общей арифметической средины, независимых результатов измерений, свободных от переменных систематических погрешностей, то величина

$$\mu^2 = \frac{[p\nu^2]}{[n-1]} \tag{6.31}$$

является состоятельным и несмещенным приближением к квадрату стандарта (дисперсии) единицы веса.

Если переменные систематические погрешности отсутствуют в результатах измерений, то в соответствии со вторым свойством они отсутствуют и в общей арифметической средине.

Как и в случае доказательства теоремы (см. п.п.п.1.5.2, формула 5.12) о том, что вероятнейшие поправки, есть состоятельное и несмещенное приближение к квадрату стандарта, и на основании формул (5.13) и (5.14) получим соотношения для расчета вероятнейших поправок неравноточных измерений

$$\nu_1 = \Delta_L - \Delta_1;\ \nu_2 = \Delta_L - \Delta_2;\ldots;\nu_n = \Delta_L - \Delta_n,$$

где Δ_L - случайная погрешность арифметической средины, Δ_i, $i = \overline{1,n}$ - случайные погрешности результатов измерений.

Преобразуем полученную систему уравнений следующими процедурами. Во-первых, поменяем местами правые и левые части каждого из уравнений, во-вторых, возведем в квадрат правые и левые части уравнений и в-третьих, преобразуем их в соответствии с формулами сокращенного умножения многочленов. В результате получим

$$\Delta_1^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L\nu_1 + \nu_1^2;\ \Delta_2^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L\nu_2 + \nu_2^2;\ldots;\ \Delta_n^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L\nu_n + \nu_n^2.$$

Умножим каждое из этих выражений на соответствующий ему вес p_i, $i = \overline{1,n}$ и почленно их просуммируем. Это приводит к следующему формальному представлению $[p\Delta^2] = [p\ ]\Delta_L^2 - 2\Delta_L\ [p\nu] + [p\nu^2]$. Учитывая четвертое свойство общей арифметической средины, а именно, что $[p\nu] = 0$, и преобразовывая уравнение, получим:

$$[p\nu^2] = [p\Delta^2] - [p\ ]\,\Delta_L^2,$$

Умножим левую и правую части уравнения на $\frac{n}{n(n-1)}$, получим:

$$\frac{[p\nu^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left\{ \frac{[p\Delta^2]}{n} - \frac{[p]}{n}\Delta_L^2 \right\}, \tag{6.32}$$

и перейдем к пределу по n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p\nu^2]}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\left\{ \lim_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{[p]}{n}\lim_{n\to\infty}\Delta_L^2 \right\}. \tag{6.33}$$

Рассмотрим пределы правой части выражения (6.33).

1. При доказательстве теоремы в п.п.п. 1.5.2 уже показано, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1.$$

2. Для исследования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n}$ умножим результаты измерений на корни квадратные из их весов $l_i' = l_i\sqrt{p_i}$, $i = \overline{1,n}$. Величины l_i' в соответствии с (6.7) имеют веса, равные единице, следовательно, их можно рассматривать как результаты равноточных измерений, а их случайные погрешности $\Delta_1' = \Delta_1\sqrt{p_1}$, $\Delta_2' = \Delta_2\sqrt{p_2}$, …, $\Delta_n' = \Delta_n\sqrt{p_n}$ имеют стандарт, равный стандарту единицы веса $\bar{\sigma}$. Поэтому на основании свойства рассеивания случайных погрешностей (1.12) можем записать:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(\Delta')^2]}{n} = \bar{\sigma}^2. \tag{6.34}$$

3. Определим, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[p]}{n}$. Учитывая ограничительное условия на веса, которые рассматривались в п.п.п. 1.6.3, а именно $c_1 \le p_i \le c_2$, $i = \overline{1,n}$ имеет место неравенство $p_i \le c_2$. Просуммируем эти неравенства от p_i до p_n, получим $[p] \le nc_2$. Разделив левую и правую части полученного неравенства на n и переходя к пределу, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p]}{n} < c_2. \tag{6.35}$$

4. На основании третьего свойства общей арифметической средины можно заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_L = 0. \tag{6.36}$$

Подставляя пределы (6.34), (6.35) и (6.36) в выражение (6.33) и принимая во внимание ограниченность величины (6.35), переходим к пределу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[p\nu^2\right]}{n-1} = \bar{\sigma}^2, \tag{6.37}$$

что и доказывает состоятельность оценки (6.31). Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства несмещенности оценки (6.31) предположим, что имеется t- рядов результатов независимых неравноточных измерений:

$$l_1', l_2', ..., l_n';\ l_1'', l_2'', ..., l_n'';\ldots; l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, ..., l_n^{(t)}$$

с весами $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда это доказательство сводится к доказательству несмещенности оценки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left[\mu^2\right]}{t} = \bar{\sigma}^2, \tag{6.38}$$

где $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_t$ - величины, вычисленные по формуле (6.31) для каждого из приведенных выше рядов измерений. На основании формул (6.31) и (6.32) запишем:

$$\left[\mu^2\right] = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{\left[p\Delta^2\right]}{n} - \frac{[p]}{n}\sum_{i=1}^{t} \Delta_L^2\right\}.$$

Разделим это выражение почленно на t и перейдем к пределу $t \to \infty$, будем иметь уравнение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left[\mu^2\right]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\lim_{t\to\infty} \sum_{t\to\infty}^{t} \frac{\left[p\Delta^2\right]}{nt} - \frac{[p]}{n} \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i\to\infty}^{t} \Delta_L^2}{t}\right\}. \tag{6.39}$$

Рассмотрим пределы в правой части полученного выражения. В соответствии с формулой (6.34)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\left[p\Delta^2\right]}{nt} = \bar{\sigma}^2.$$

Обозначим $\Delta_{L1}, \Delta_{L2}, ..., \Delta_{Lt}$ - случайные погрешности общих арифметических средин, а $L', L'', \ldots, L^{(t)}$ - случайные погрешности равноточных величин, имеющих один и тот же вес $[p]$. На основании свойства рассеивания случайных погрешностей (1.12) принимаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum \Delta_L^2}{t} = \bar{\sigma}_L^2 .$$

Подставим эти пределы в выражение (6.39), получим формулу

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[\mu^2]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\bar{\sigma}^2 - \frac{[p]}{n}\sigma_L^2\right\}.$$

Заменим σ_L^2 ее значением из (6.20), и проведем необходимые преобразования. В результате получим

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[\mu^2]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{(n-1)}{n}\bar{\sigma}^2\right\} = \bar{\sigma},$$

что и доказывает несмещенность оценки (6.31), которую называют **эмпирической среднеквадратической погрешностью единицы веса**. Доказана вторая часть теоремы.

Надежность величины, вычисленной по формуле (6.31), как и в случае равноточных измерений, может быть оценена с помощью приближенной формулы

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} . \qquad (6.40)$$

На основании формулы (6.37) приходим к выводу, что если известны истинные случайные погрешности ряда неравноточных измерений одной и той же величины, среднеквадратическая погрешность единицы веса может быть вычислена по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} , \qquad (6.41)$$

а ее надежность оценена по приближенной формуле

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} . \qquad (6.42)$$

Таким образом, на основе доказательства теоремы получена формула для расчета одной из точностных характеристик неравноточных измерений - эмпирической среднеквадратической погрешности единицы веса.

6.5. Последовательность математической обработки ряда неравноточных измерений одной и той же величины

По аналогии с организацией последовательности математической обработки ряда равноточных измерений (см. п.п.1.5.3) зададим последовательность математических процедур для ряда неравноточных измерений одной и той же величины.

Процедура 1. Вычисление весов результатов измерений. В зависимости от конкретных условий измерения используется одно из выражений:

- формула (6.1), когда стандарты результатов измерений известны и могут быть определены теоретически;

- формула (6.9), когда стандарты неизвестны;

- формула (6.10) в случае равенства стандартов (см. пример 1 в п.п.п.1.6.2);

- формула (6.13) в случае линейных измерений и отсутствия систематических погрешностей (см. пример 2 в п.п.п.1.6.2);

- формула (6.14) в случае измерения превышения нивелирного хода, если ход проложен в равнинной местности и известно среднее расстояние между станциями, а формула (6.15), если считать, что на всех станциях превышения измерены равноточно (см. пример 3 в п.п.п. 1.6.2).

Процедура 2. Вычисление общей арифметической средины по формуле (6.17) и вероятнейших поправок по формуле $\nu_i = L - l_i$, $i = \overline{1, n}$.

Особенностью процедуры является то, что вычисления, как правило, выполняются с округлениями, вместо L получаем ее приближенное значение L', а вместо поправок ν_i их смещенные величины ν'_i, $i = \overline{1, n}$.

Процедура 3. Контрольная проверка правильности вычисления вероятнейших поправок, которая осуществляется с использованием формулы

$$[p\nu'] = [p]\ (L' - L). \tag{6.43}$$

Процедура 4. **????** Вычисление несмещенного значения суммы $\left[p\nu^2\right]$. Для этого применяется формула $\left[p(\nu')^2\right] = \left[p\nu^2\right] + [p](L' - L)^2$, которая получена при доказательстве пятого свойства общей арифметической средины. Преобразуя это выражение находим:

$$\left[p\nu^2\right] = \left[p(\nu')^2\right] - [p](L' - L)^2. \tag{6.44}$$

Процедура 5. Контроль правильности вычисления по формуле (6.44), который осуществляется путем расчета этой же величин, но по другой формуле

$$\left[p\nu^2\right] = \left[p(\nu')^2\right] - \frac{[p\nu']^2}{[p]}.$$

Если результаты вычисления одинаковые, то выполняется следующая процедура.

Процедура 6. Вычисление среднеквадратической погрешности единицы веса μ путем подставления значения $\left[p\nu^2\right]$ в формулу (6.31).

Процедура 7. Оценка надежности полученного результата по формуле (6.40).

Процедура 8. Вычисление среднеквадратической погрешности общей арифметической средины M по формуле (6.30).

Процедура 9. Оценка надежности полученного результата с использованием формулы

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{6.45}$$

Рассмотрим последовательность математической обработки ряда неравноточных измерений на конкретном примере.

Пример. Для определения высоты узловой точки **C** (рис.6.2) от исходных марок высокоточного нивелирования проложено три нивелирных хода. Необходимо найти наиболее надежное значение высоты точки **C**, ее среднеквадратичную погрешность **М**, среднеквадратическую погрешность на 1 км хода μ, оценить надежность величины μ и **М**.

Все исходные данные табулированы (см. табл. 6.1).

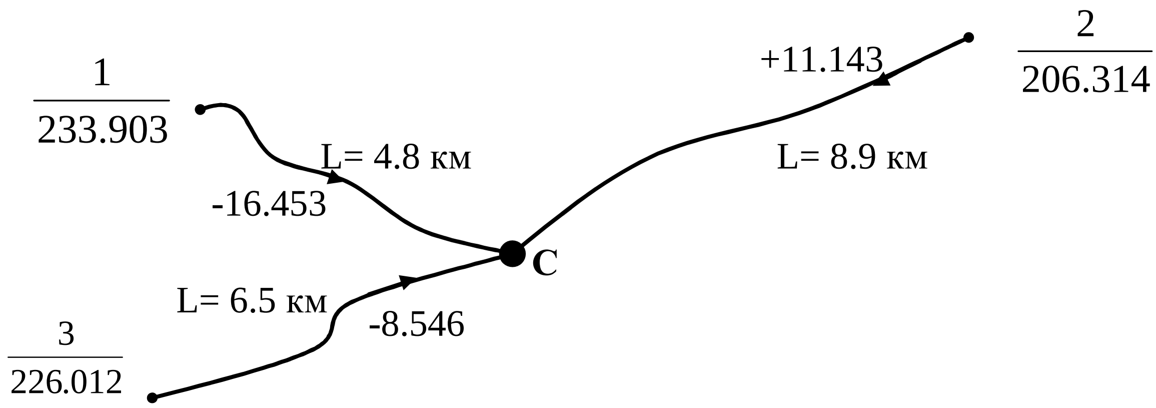


Рис.6.2. Иллюстрация к примеру

Таблица 6.1

Исходные данные для решения задачи

№ хода	Длина хода в км	Высота исходной марки	Изм. превышение	Выч. высоты Í ′ узловой точки **C** в [м]	Вес хода p_L при с =10	Вероятнейшие поправки v [мм]	$(v)^2$	$p(v')^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	4.8	233.903	-16.453	217.450	2.08	+7	49	101.9
2	8.9	206.314	+11.143	217.457	1.12	0	0	0
3	6.5	226.012	-8.546	217.466	1.54	-9	81	124.7

В соответствии с **первой процедурой** по исходным данным выбираем формулу (6.13), которую можно использовать для расчета веса ходов с коэффициентом пропорциональности с =10.

Для первого хода $p_L = \frac{c}{L} = \frac{10}{4.8} = 2.08$. Результаты остальных двух вычислений занесены в таблицу.

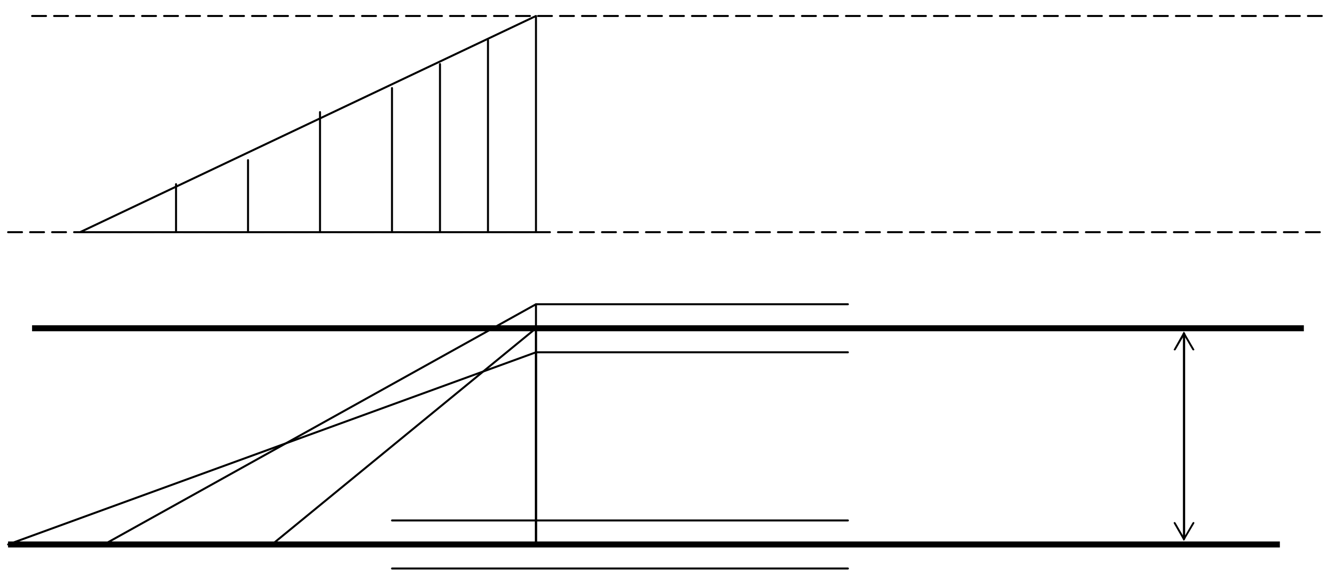
Вычислим в соответствии со **второй процедурой** общую арифметическую средину по формуле (6.17) подставив в нее численные значения

$$L = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{2.08 \cdot 4.8 + 1.12 \cdot 8.9 + 1.54 \cdot 6.5}{2.08 + 1.12 + 1.54} = \frac{29.962}{4.74} = 6.32 .$$

На основании численного значения общего *для трех ходов арифметической* средины по формуле $\nu_i = L - l_i$, $i = \overline{1,n}$ рассчитаем вероятнейшие поправки для каждого хода. $\nu_1 = L - l_1 = 6.32 - 4.8 = 1.52$, $\nu_2 = L - l_2 = 6.32 - 8.9 = -2.58$, $\nu_3 = L - l_3 = 6.32 - 6.5 = -0.18$

Процедура 2. Вычисление общей арифметической средины по формуле (6.17) и вероятнейших поправок по формуле

Особенностью процедуры является то, что вычисления, как правило, выполняются с округлениями, вместо L получаем ее приближенное значение L', а вместо поправок ν_i их смещенные величины ν_i', $i = \overline{1,n}$.



$[pH']$=1030.745 $[p]$=4.74 $[pv']$=0.7 $\left[p(v')^2\right]$=226.6,

$$L = \frac{1030.745}{4.74} = 217.4568 ,$$

$$[p](L' - L) = 4{,}74 \times 0.15 = 0.7$$

$$[pv^2] = 226.6 - 4{,}74 \times (0.15)^2 = 226.5\,,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{226.5}{3-1}} = 10.6\text{мм} \qquad [pv^2] = 226.6 - \frac{(0.7)^2}{4.74} = 226.5\,.$$

$$M = \frac{10.6}{\sqrt{4.74}} = 4.9\text{мм}\,,$$

$$m_\mu = \frac{10.6}{\sqrt{2(3-1)}} = 5.3\text{мм}\,,$$

$$m_M = \frac{4.9}{\sqrt{4.74}} = 2.2\text{мм}\,.$$