Содержательный модуль 7
Двойные измерения

7.1. Общие положения

В геодезической практике принято каждую физическую величину измерять независимо не менее двух раз, так как при одном измерении невозможно осуществить контроль правильности измерений. Так, горизонтальный угол измеряется в положениях трубы теодолита ”круг право” и ”круг лево”, линии измеряют два раза - в прямом и обратном направлении, при геометрическом нивелировании превышение на станции определяют по чёрной и красной сторонам рейки, в тригонометрическом нивелировании превышение определяется в прямом и обратном направлении, при нивелировании II и III класса нивелирный ход прокладывают в прямом и обратном направлении. Такого рода пары измерений получили название **двойные измерения**.

В каждой паре двойных измерений имеет место разность

$$d_i = l_i' - l_i'',\ i = \overline{1,n}, \tag{7.1}$$

где l_i', l_i'' - результаты двух измерений одного и того же объекта.

Совокупности разностей d_i, при достаточно большом их числе дают возможность оценивать точность измерений, а в ряде случаев обнаруживать систематические погрешности.

Сделаем допущение, что из пяти факторов, рассмотренных нами в п.п.2.3, разности d_i зависят от исполнителя, прибора, метода измерения, и совершенно не зависят от объекта измерения. Поэтому оценка точности по разностям двойных измерений может оказаться завышенной, так как не учитывает погрешности центрирования теодолита и установки визирных целей при измерении горизонтальных углов, оседания башмаков или кольев при геометрическом нивелировании и другие внешние факторы.

По этой причине оценку точности по разностям двойных измерений иногда называют **оценкой точности по внутренней сходимости**.

7.2. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений

При отсутствии систематических погрешностей на основании того, что за погрешность измерений принимают разность между результатом измерения и истинным его значением можно записать

$$l_i' = X + \Delta_i', \; l_i'' = X + \Delta_i'', \; i = \overline{1,n}, \tag{7.2}$$

где X – истинное значение измеряемой величины Δ_i', Δ_i'' - случайные погрешности результатов измерений.

Подставляя выражения (7.2) в формулу (7.1) и осуществляя соответствующие преобразования, получим

$$l_i' - l_i'' = \Delta_i' - \Delta_i'' = d_i, \; i = \overline{1,n}, \tag{7.3}$$

Из полученного результата следует, что разности d_i являются истинными погрешностями двойных измерений. Поэтому, если имеется ряд двойных измерений одной и той же физической величины $l_1', l_2', ..., l_i', ..., l_n'$; $l_1'', l_2'', ..., l_i'', ..., l_n''$, $i = \overline{1,n}$, где n - количество результатов в первой и второй сериях измерений. Тогда справедливы разности $l_1' - l_1'' = d_1$; $l_2' - l_2'' = d_2; \ldots; l_n' - l_n'' = d_n$. Среднеквадратическую погрешность этих разностей с учетом соотношения (3.6) можно вычислить используя выражение

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \; . \tag{7.4}$$

Если допустить, что m – среднеквадратическая погрешность отдельного точечного результата измерения (см. п.п.п. 1.3.2), а так же, что при $n \to \infty$ среднеквадратическая погрешность приближенно можно приравнять к стандарту σ (см. формулу 4.21) можно записать $m_d = m\sqrt{2}$ или сделав элементарные преобразования получим

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \tag{7.5}$$

Подставляя из формулы приближенного вычисления (7.5) m_d в формулу (7.4), получим формулу для вычисления среднеквадратической погрешности по разностям двойных измерений:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \tag{7.6}$$

а для среднего из двух серий измерений $l_i = \frac{1}{2}(l'_i + l''_i)$ на основании свойства 1 простой арифметической средины (см. формулу (5.2)) получим следующее соотношение

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}}. \tag{7.7}$$

При относительно небольшом количестве измерений n в каждой серии надежность оценок полученных на основе формул (7.6) и (7.7) можно определить по формуле $m_m = \frac{m_{m_d}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2}}$ или учитывая выражение (7.4) и (7.5) преобразовать ее в формулу вида:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{7.8}$$

Далее вычислим среднеквадратическую погрешность простой арифметической средины двух серий измерений по формуле

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2}}$$

или подставляя значение m из формулы (7.7), получим

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}. \tag{7.9}$$

Рассмотренный способ оценки точности по разностям двойных измерений применяется тогда, когда разности d_i в данном ряду результатов измерений не содержат систематических погрешностей.

Для обнаружения наличия в ряде результатов двоичных измерений систематической погрешности воспользуемся свойством компенсации случайных погрешностей (1.10). При отсутствии систематической погрешности величина $\frac{[d_i]}{n}$, $i=\overline{1,n}$ должна стремится к нулю. В противном случае можно считать, что на процесс измерений оказывали влияние некоторые случайные факторы или разности d_i содержат систематические погрешности θ_d

Для выявления факта наличия в результатах измерений систематических ошибок в качестве рабочей гипотезы примем, что разность двойных измерений содержит среднюю систематическую погрешность:

$$\theta_d = \frac{[d]}{n}.$$

Исключим эту величину из каждой разности d_i и формально запишем:

$$\partial_1 = d_1 - \theta_d;\ \ \partial_2 = d_2 - \theta_d; \ldots; \partial_n = d_n - \theta_d. \tag{7.10}$$

Тогда подставляя в формулу (7.5) формулу (7.4), а в нее полученные результаты - выражения (7.10), получим формулу для вычисления количественных значений эмпирической среднеквадратической погрешности

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}}. \tag{7.11}$$

Учитывая величину предельной погрешности (см. формулу (3.10)), принятой в геодезии, а также формулу (7.11) можно составить следующее неравенство:

$$|\theta_d| > \frac{2m}{\sqrt{n}}, \tag{7.12}$$

при выполнении, которого приходим к заключению, что разности d_i содержат систематическую погрешность θ_d. В противном случае величина $\frac{[d_i]}{n}$ является следствием различных случайных факторов. Рассмотрим пример.

Пример 7.1. В результате измерения превышений при двух горизонтальных приборах на смежных станциях при одинаковых расстояниях от инструментов до реек получены результаты измерений, которые табулированы в табл.7.1. Необходимо определить точность измерений и их надежность.

Таблица 7.1.

Результаты измерения превышений

№ станции	h_1 м	h_2 м	d мм
1	-0,479	-0,480	+1
2	-0.292	-0.289	-3
3	-0.207	-0.209	+2
4	-0.175	-0.172	-3
5	-0.102	-0.102	0
6	+0.066	+0.065	+1
7	+0.124	+0.120	+4
8	+0.190	+0.188	+2
9	+0.268	+0.271	-3
10	+0.303	+0.305	-2

Определим среднюю разность измеренных величин

$$\frac{[d]}{n}=\frac{1+(-3)+2+(-3)+0+1+4+2+(-3)+(-2)}{10}=-0.1\text{ мм.}$$

Полученная величина намного меньше предельной погрешности округления отсчета 0.5 мм, так что предполагать наличие в результатах расчета разности d_i систематической погрешности нет никаких оснований.

По формуле (7.6) найдем среднеквадратическую погрешность измеренного превышения:

$$m_h=\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}=\sqrt{\frac{1^2+(-3)^2+2^2+(-3)^2+0^2+1^2+4^2+2^2+(-3)^2+(-2)^2}{2\cdot 10}}=\sqrt{\frac{57}{20}}=1.7\text{мм.}$$

Среднеквадратическую погрешность отсчета по рейке на основании (4.21) определим из выражения

$$m_u=\frac{m_h}{\sqrt{2}}=\frac{1.7}{\sqrt{2}}=1.2\text{ мм.}$$

Среднеквадратическую погрешность среднего превышения вычислим используя формулу (5.26) и подставляя в нее значение m_u

$$M = \frac{m_u}{\sqrt{n}} = \frac{1.2}{\sqrt{10}} = 0.38 \text{ мм}$$

Определим надежность оценивания среднеквадратической погрешности отсчета по рейки m_u используя формулу (7.8)

$$m_{m_h} = \frac{m_h}{\sqrt{2n}} = \frac{1.7}{\sqrt{20}} = 0.38 \text{ мм}$$

и надежность оценивания среднеквадратической погрешности среднего превышения M по формуле (7.9)

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{0.38}{\sqrt{20}} = 0.085 \text{ мм.}$$

Сравнивая оценочные показатели точности измерений и их надежности можно утверждать, что измерения выполнены достаточно точно и полученным результатам можно доверять.

Рассмотрим еще один пример оценивания точности и надежности двойных равноточных измерений.

Пример 7.2. Исследуются результаты двойных равноточных измерений, а именно результаты смещения шкал красной стороны пары реек, которые помещены в табл. 7.2.

Таблица 7.2.

Результаты двойных равноточных измерений

№ точек	Отсчеты		Разность d мм	∂ мм
	Рейка №1	Рейка №2		
1	5150	5146	+4	0
2	5200	5194	+6	+2
3	5277	5273	+4	0
4	5379	5375	+4	0

5	5196	5194	+2	-3
6	5245	5242	+3	-1
7	5325	5322	+3	-1
8	5426	5420	+6	+2

Анализ результатов измерений, помещенных в табл. 7.2 показывают, что они имеют один знак. Этот факт является признаком наличия в измерениях систематического смещения (погрешности). Найдем величину этого смещения по формуле:

$$\theta = \frac{[d]}{n} = \frac{32}{8} = 4 \text{ мм.}$$

Вычислим разности $\partial_i = d - \theta$, $i = \overline{1{,}8}$. Результаты вычислений занесены в правый столбец табл. 7.2.

Воспользуемся формулой (7.11) для вычисления эмпирической среднеквадратической погрешности отсчета по рейке, получим:

$$m_u = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{19}{14}} = 1.2 \text{ мм.}$$

Для того, чтобы убедится, что результаты измерений имеют систематическую погрешность воспользуемся неравенством (7.12) и подставляя в него полученные значения, получим:

$$4 > \frac{2 \cdot 1.2}{\sqrt{8}} = 0.8 \text{ мм.}$$

Результат показывает наличие в измерениях систематической погрешности. С использование формулы (7.8) оценим надежность значения m_u:

$$m_{m_u} = \frac{m_u}{\sqrt{2n}} = 0.3 \text{ мм.}$$

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что красная шкала рейки №1 смещена по отношению к рейки №2 на +4 мм. Поэтому необходимо либо заменить одну из реек в комплекте, либо учитывать это смещение при вычислении превышения по красной стороне рейки.

7.3. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений

Рассмотрим n пар двойных неравноточных измерений объектов одного и того же рода. Формально запишем

$$(l_1', l_1'') \in p_1;\ (l_2', l_2'') \in p_2; \ldots; (l_n', l_n'') \in p_n, \tag{7.13}$$

где знак «$\in$» обозначает принадлежность веса p_i, $i = \overline{1,n}$ к каждому измерению выделенных пар. При этом в каждой паре измерения равноточны.

Такая ситуация имеет место при сравнении результатов линейных измерений полигонометрических (теодолитных) хода, где линии имеют разную длину, или при сравнении результатов двойного нивелирования в ходах разной длины.

Составим для каждой пары (7.13) разности

$$l_1' - l_1'' = d_1;\ l_2' - l_2'' = d_2; \ldots; l_n' - l_n'' = d_n, \tag{7.14}$$

которые являются истинными погрешностями.

Для веса разности d_i, $i = \overline{1,n}$ запишем выражения с учетом основной теоремы теории погрешности и формулы (6.6)

$$\frac{1}{p_{d_1}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} = \frac{2}{p_1}.$$

Осуществляя несложные преобразования полученной формулы найдем вес разности каждого измерения

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \tag{7.15}$$

Определим среднеквадратическую погрешность веса, воспользовавшись при этом выражением (6.41) и подставив в него выражение (7.15), получим формулу,

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_1}{2} \cdot d_1^2 + \frac{p_2}{2} \cdot d_2^2 + \cdots + \frac{p_n}{2} \cdot d_n^2}{n}}$$

или упрощая ее, имеем:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd^2\right]}{2n}}. \tag{7.16}$$

Соответственно средняя квадратичная погрешность результата одного измерения с весом p_i определяется на основании (6.8) путем замены в этой формуле стандарта единицы веса $\bar{\sigma}$ на среднеквадратическую погрешность единицы веса μ. Тогда получим:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \ i = \overline{1, n}. \tag{7.17}$$

Среднеквадратическая погрешность арифметической средины по каждой паре (7.14) вычисляется по формуле:

$$M_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}, \ i = \overline{1, n}. \tag{7.18}$$

Надежность оценок μ, m_i, M_i, вычисленных по формулам (7.16), (7.17) и (7.18) соответственно, находим из равенств:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}}, \tag{7.19}$$

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}, \tag{7.20}$$

$$m_{M_i} = \frac{M_i}{\sqrt{2n}}. \tag{7.21}$$

Формулы (7.16 – 7.21) справедливы, если разности d_i не содержат существенных систематических погрешностей.

При наличии систематических погрешностей определяют коэффициент систематического влияния, который вычисляется по формуле:

$$\lambda_l = \frac{[d]}{[l]}, \tag{7.22}$$

где l – длины измеряемых линий для линейных измерений и

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]}, \tag{7.23}$$

где L – длина хода для двойного нивелирования.

Найдем соотношения, при помощи которых можно было бы вычислить поправки с учетом коэффициентов систематического влияния λ_l и λ_L: $\partial_i = d_i - \lambda_l \cdot l$ для линейных измерений и $\partial_i = d_i - \lambda_L \cdot L$ для двойного нивелирования.

С учетом поправок вычислим среднеквадратическую погрешность единицы веса по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}. \tag{7.24}$$

Для оценивания надежности среднеквадратической погрешности воспользуемся формулой (6.40) подставляя в нее формулу (7.24).

Среднеквадратическая погрешность измеренной длины линии или нивелирного хода с учетом формулы (7.24) рассчитывается по формуле

$$m_i = \mu\sqrt{L}, \tag{7.25}$$

а среднее превышение по ходу рассчитывается в соответствии с выражением:

$$M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p}}. \tag{7.26}$$

Надежность оценок точности измерений (7.25) и (7.26) определим по формулам (7.20) и (7.21).

Приведем пример оценивания точности двойных измерений.

Пример 7.3. Необходимо оценить точность результатов двойного нивелирования по 10 ходам, которые представлены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Результаты двойного нивелирования по 10 ходам

№ ходов	Разность d, мм	Длина хода L, км	$-\lambda L$, мм	∂, мм	∂^2	$p\partial^2$	m_i мм	M_i мм
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	54.2	2.6	-7.7	46.5	2162.2	831.6	20.5	14.5
2	54.3	8.2	-24.3	30.0	900.0	109.8	36.4	25.7
3	44.0	7.7	-22.8	21.2	449.4	58.4	35.2	24.9
4	-13.4	8.7	-25.8	-39.2	1536.6	176.6	37.5	26.5
5	-2.9	6.2	-18.4	-21.3	453.7	73.2	31.6	22.3
6	54.3	3.5	-10.4	43.9	1927.2	550.6	23.8	16.8
7	32.3	2.3	-6.8	25.5	650.2	282.7	19.3	13.6
8	-5.5	6.7	-19.9	-25.4	645.2	96.3	32.9	23.3
9	-24.8	3.1	-9.2	-34.0	1156	372.9	22.4	15.8
10	-29.5	6.0	-17.8	47.3	2237.3	372.8	31.1	22.0
	$[d]=163.0$	$[L]=55.0$						

Просуммируем значения второго и третьего столбцов табл.7.3, получим $[d]=163.0$ и $[L]=55.0$. По формуле (7.23) вычислим коэффициент систематического влияния на измерения:

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]} = 2.96\ \frac{\text{ìì}}{\text{êì}}.$$

Для вычисления разностей ∂_i, $i=\overline{1,10}$ необходимо вычислить произведения $\lambda_L L_i$ и их значения, с учетом знака, занести в 4-й столбец табл. 7.3. Сумма этих произведений равна $[-\lambda L]=163.1$. Известные значения подставим в формулу $\partial_i = d_i - \lambda \cdot L_i$, которая учитывает поправку, компенсирующую систематические погрешности каждого хода двойного нивелирования. Результаты вычисления величин ∂_i поместим в 5-й столбец табл.7.3.

Рассчитаем поправку ∂^*, которая учитывает как коэффициенты систематического влияния для отдельно взятого измерения, так и длины хода для двойного нивелирования. Эту поправку вычислим сначала преобразовав формулу (7.23) к виду: $[d] = \lambda_L [L]$, а затем подставляя известное значение $[-\lambda L]$ и вычисленное значение $\lambda_L [L] = 163.2$ в формулу $\partial^* = \lambda_L [L] - [\lambda L]$, получим $\partial^* = 0.1$.

Принимая во внимание формулу (6.14) для вычисление веса превышения нивелирного хода рассчитаем $p_i = \frac{1}{L_i}$ для нашего случая и полученные веса умножим на квадраты разностей ∂^2. Результаты занесем в 7-й столбец табл.7.3. Просуммируем полученные результаты в соответствии с формулой $[p\partial^2] = 2924.9$.

Показатели оценивания точности результатов измерений

Вычислим среднеквадратическую погрешность единицы веса, которая считается показателем оценки точности результатов измерений. Для этого в формулу (7.24) подставим известные численные значения, получим:

$$\mu = \sqrt{\frac{2924.9}{2(10-1)}} = 12.7 \ \frac{\text{ìì}}{\text{êì}}.$$

Вычислим среднеквадратическую погрешность измеренных длин линий или нивелирного хода для каждого из ходов по формуле (7.27), а результаты занесем в 8-й столбец табл.7.3

$$m_i = \mu \sqrt{L_i}. \tag{7.27}$$

Вычислим среднее превышение по ходу учитывая формулу (7.26), (6.15) и приводя их к виду

$$M_i = \mu \sqrt{\frac{L_i}{2}} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \tag{7.28}$$

Показатели оценивания надежности результатов измерений

Надежность значения показателя μ оценим с использованием формулы (7.19):

$$m_{\mu} = \frac{12.7}{\sqrt{20}} = 2.8\ \text{ìì}\ .$$

Надежность значений показателя m_i оценим с использованием формулы (7.20) подставляя в нее результаты вычислений (см. 8-й столбец табл.7.3), получим:

$$m_{m_1} = \frac{m_1}{\sqrt{2n}} = \frac{20.5}{\sqrt{20}} = 4.58;\ m_{m_2} = \frac{m_2}{\sqrt{2n}} = \frac{36.4}{\sqrt{20}} = 8.14;\ldots;m_{m_{10}} = \frac{m_{10}}{\sqrt{2n}} = \frac{31.1}{\sqrt{20}} = 6.95.$$

Надежность значений показателя M_i оценим с использованием формулы (7.21), подставив в нее результаты вычислений (см. 9-й столбец табл.7.3), получим:

$$m_{M_1} = \frac{M_1}{\sqrt{2n}} = \frac{14.5}{\sqrt{20}} = 3.24;\ m_{M_2} = \frac{M_2}{\sqrt{2n}} = \frac{25.7}{\sqrt{20}} = 5.74;\ldots;m_{M_{10}} = \frac{M_{10}}{\sqrt{2n}} = \frac{22.0}{\sqrt{20}} = 4.91\ .$$

Обобщим, полученные в процессе математической обработки результаты. С учетом компенсации систематической погрешности среднеквадратическая погрешность единицы веса двойных измерений составила 12.7 мм/км, что при суммарном значении длины хода $[L] = 55.0$ км составляет незначительную величину. В данном случае можно утверждать, что двойные измерения проведены с хороший точностью.

Остальные показатели m_i и M_i характеризуют точность двойных измерений каждого хода. Анализ 8-го и 9-го столбцов табл. 7.3 показывают, что наиболее грубый результат получен при измерении 4 хода. Сравнивая показатели точности оценок и их надежности можно утверждать о достаточно высокой точности измерений и их надежности.

Таким образом, рассмотрены общие положения и особенности двойных измерений. На этой основе рассмотрены процедуры и показатели оценивания точности по разностям двойных равноточных и неравноточных измерений. Показано, что оценка надежности является составной частью оценивания точности результатов измерения. Примеры, рассмотренные в данном разделе способствуют лучшему усвоению логики математических преобразований.