Содержательный модуль 1

Уравнивание результатов геодезических измерений методами математической статистики

1.1. Сущность задачи уравнивания результатов измерений в геодезии

Напомним, что до сих пор, математическая обработка геодезических измерений использовалась при решении, в основном, трех задач:

- ❖ нахождение вероятнейшего значения *одной* физической величины в результате многократных измерений (равноточных или неравноточных) и оценки ее точности.
- ❖ оценка точности функций одной или нескольких независимо измеренных величин.
- ❖ оценка точности по результатам двойных измерений.

Получение точных и достоверных геодезических данных не ограничивается этими тремя задачами. Их многообразие обусловливает применение в обработке измерений разнообразных математических методов. Стремление геодезистов-практиков проверять и перепроверять результаты измерений с целью получения точных и надежных результатов привели к формированию обязательной процедуры, которая получила название «избыточные измерения».

Например, измерены три угла плоского треугольника. Теоретически известно, что сумма трех углов треугольника равна 180°. Достаточно измерить два угла α и β треугольника, а третий угол γ можно найти из выражения $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. Это соотношение справедливо только для истинных значений углов α и β. Но, так как эти величины измерений содержат ошибки, то они могут привести либо к их частичной компенсации, либо к грубой ошибке. Возникает ситуация неопределенности, которую геодезисты разрешают путем избыточного измерения, т.е. измерения угла γ, результат которого также содержит некоторую ошибку. Возникает задача нахождения поправок к измеренным величинам, которые бы минимизировали суммарные погрешности измерений. Такая процедура в геодезии называется *уравнивание* измеренных величин. Геометрическая интерпретация невязок при измерении трех углов треугольника иллюстрируется рис. 1.1.

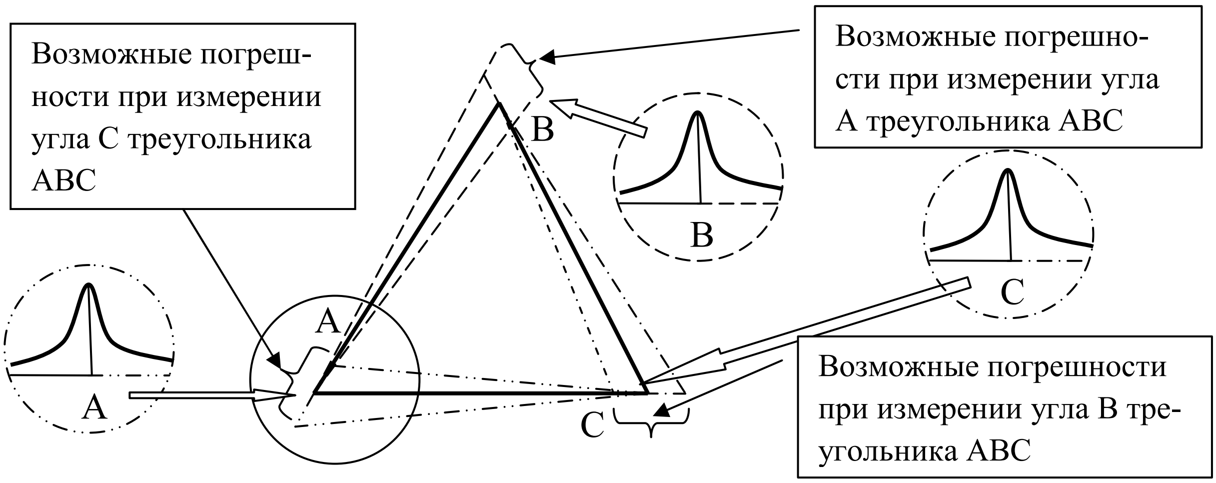

Рис.1.1. Иллюстрация невязок при измерении трех углов треугольника

Определение. 1.1. Уравнивание геодезических измерений это совокупность математических операций, выполняемых для получения вероятнейшего значения геодезических координат точек земной поверхности и для оценки точности результатов измерений.

Уравнивание проводится для устранения невязок, обусловленных наличием ошибок в избыточно измеренных величинах, и для определения вероятнейших значений искомых неизвестных или их значений, близких к вероятнейшим. В процессе уравнивания это достигается путем определения поправок к измеренным величинам (углам, направлениям, длинам линий или превышениям).

Различают строгое и упрощенное (нестрогое) уравнивание геодезических измерений. В случае строгого уравнивания поправки обычно определяют с помощью метода наименьших квадратов так, чтобы сумма квадратов всех поправок была наименьшей. Определяемые поправки такого уравнивания имеют вероятнейшие (оптимальные) значения. Применение метода наименьших квадратов к уравниванию измеренных величин справедливо только в том случае, когда ошибки их имеют случайный характер.

Строгое уравнивание геодезических сетей, особенно больших по размерам, сопряжено с рядом трудностей технического и организационного характера. Поэтому на практике часто применяются упрощенное (нестрогое) уравнивание, при котором все геометрические условия выполняются, а вероятнейшие значения величин и оценку точности получают приближенно.

В геодезической практике как при строгом, так и при упрощенном уравнивании широко используются главным образом два способа уравнивания: *способ условных измерений* и *способ посредственных измерений*. При первом способе поправки отыскивают непосредственно к измеренным величинам, при втором – к их функциям (как правило, координатам).

Всякий способ уравнивания состоит из следующих основных этапов:

- предварительные вычисления;
- составление условных уравнений или уравнений погрешностей;
- решение нормальных уравнений;
- оценка точности измеренных и уравненных величин.

При большом числе нормальных уравнений наиболее трудоемкой частью уравнительных вычислений является их решение, поэтому оно обычно осуществляется с использованием заранее разработанных специальных программ. Уравнения могут решаться методом последовательного исключения неизвестных (схема К.Ф.Гаусса) или методом итерации (приближений). Иногда нормальные уравнения не составляют, в этом случае неизвестные определяют непосредственно из решения или условных уравнений, или уравнений погрешностей. В некоторых случаях при обработке материалов геодезических измерений невысокой точности уравнивание результатов выполняют графическим способом.

В геодезической практике применяются различные способы уравнивания: параметрический, коррелатный, комбинированный, рекуррентный, параметрический способ с зависимыми переменными, коррелатный способ с дополнительными параметрами, способ последовательных приближений и др.

Будем рассматривать только два первых способа уравнивания – параметрический и коррелатный.

Таким образом, изложена суть одной из основных задач геодезии – уравнивание геодезических измерений. На примере измерения трех углов треугольника (избыточных измерений) наглядно показана необходимость поиска таких значений вероятностных поправок, которые бы в совокупности стремились к идеальному теоретическому результату.

Приведены основные этапы уравнивания результатов измерений в геодезии, последовательность и логика которых будет соответствовать изложению учебного материала.

1.2. Два подхода к решению задачи уравнивания геодезических построений

Из предыдущего подраздела можно заметить, что при рассмотрении сути и способов уравнивания геодезических построений в их основе лежит математическое понятие «уравнение» (условные уравнения, уравнение погрешностей, нормальные уравнения и т.д.), которое на алгебраическом языке представляет некоторую модель процесса измерений с учетом факторов, влияющих на этот процесс. Многократные, в том числе и избыточные измерения в задачах уравнивания, формально представляются в виде системы уравнений, которую можно интерпретировать как модель серии (ряда) измерений.

Многообразие и особенности решения геодезических задач приводит к тому, что, как правило, процессы измерений описываются неопределенными системами уравнений, т.е. **недоопределенной** системой – система уравнений (обычно дифференциальных), число уравнений в которой меньше числа неизвестных и **переопределенной** системой – система, число уравнений которой больше числа неизвестных. Покажем на примерах недоопределенную и переопределенную системы уравнений.

Пример 1.1.

Возьмем треугольник, где измерены три угла. Следовательно, имеет место уравнение

$$\beta_1 + V_1 + \beta_2 + V_2 + \beta_3 + V_3 - 180^\circ = 0,$$

где β – измеренные углы, V – поправки к измерениям. На рис. 1.1 вершине треугольника **A** соответствует угол β_1, вершине **B** соответствует угол β_2, а вершине **C** угол β_3. Обозначим $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ = W$, где W – невязка в треугольнике. Тогда справедливо записать

$$V_1 + V_2 + V_3 + W = 0. \qquad (1.1)$$

Получено уравнение, которое содержит три неизвестных V_1, V_2, V_3 и один свободный член W. Такое уравнение имеет множество решений, т.е. система уравнений, состоящая из одного уравнения является недоопределенной.

Пример 1.2.

Рассмотрим систему трех нивелирных ходов с одной узловой точкой **C**. При этом будем считать высоту узловой точки H неизвестной. Необходимо найти эту высоту. Поясним данную задачу графически (см. рис. 1.2).

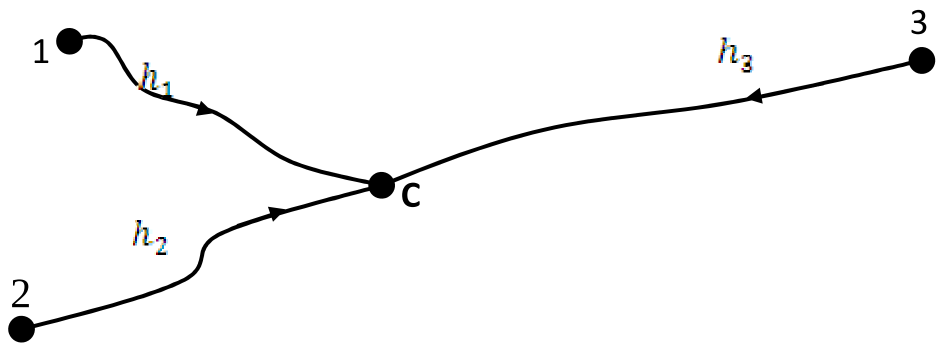

Рис. 1.2. Иллюстрация к примеру 1.2

Математическая модель данной ситуации имеет вид:

$$H - H_1 - h_1 = V_1;\ H - H_2 - h_2 = V_2;\ H - H_3 - h_3 = V_3, \qquad (1.2)$$

где H_1, H_2, H_3 - высоты исходных реперов, $\mathrm{h_i}$, $i = \overline{1,3}$ – измеренные превышения, Н – высота узловой точки С. Таким образом, имеем три уравнения с одним неизвестным, т.е. система уравнений (1.2) является переопределенной и имеет, также как и в примере 1.1, множество решений.

Практика показывает, что процесс уравнивания геодезических построений всегда описывается неопределенными системами уравнений, которые не имеют единственного решения, т.е. не могут быть решены способами элементарной алгебры – способами подстановки, сравнения, сложения, графическим способом или методом определителя. Метод решения неопределенных систем уравнений был предложен в начале XIX в. немецким математиком и геодезистом К.Ф.Гауссом (1777 – 1855) и французским математиком А.М.Лежандром, который получил название метода наименьших квадратов.

1.3. Суть метода наименьших квадратов и обоснование его использования в уравнивании геодезических построений

Метод наименьших квадратов является одним из методов регрессионного анализа и предназначен для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. Он применяется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

С целью увеличения точности результатов измерений в геодезии замеры искомой физической величины осуществляются многократно и за окончательный результат принимают арифметическую середину из всех отдельных измерений. Свойства арифметической середины имеет стохастическую природу и рассмотрены в модуле 1 (п.5.1). Учитывая свойства арифметической середины легко показать, что сумма квадратов уклонений отдельных измерений от арифметической середины будет меньше, чем сумма квадратов уклонений отдельных измерений от какой бы то ни было другой величины. Следовательно, правило вычисления арифметической середины является простейшим случаем метода наименьших квадратов.

Суть решения неопределенных систем уравнений, описывающих некоторое геодезическое построение заключается в том, что на них накладываются условия минимизации:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i V_i^2 = \left[pV^2\right] \rightarrow \min \qquad (1.3)$$

для неравноточных измерений, где p – веса измерений V – поправка измерений. В случае равноточных измерений формула (1.3) будет иметь вид: $\sum\limits_{i=1}^{n} V_i^2 = \left[V^2\right] \rightarrow \min$.

Рассмотрим решение задачи уравнивания с использованием метода наименьших квадратов на примере системы уравнений (1.2). Представим эту систему уравнений в виде:

$$H - l_1 = V_1;\ H - l_2 = V_2;\ H - l_3 = V_3,$$

где $l_i = H_i + h_i$, $(i = 1,2,3)$. Подставим полученные соотношения V_1, V_2, V_3 в формулу (1.3) получим функцию:

$$f(H) = p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + p_3 V_3^2 = p_1(H - h_1)^2 + p_2(H - h_2)^2 + p_3(H - h_3)^2.$$

Из курса математического анализа известно, что одной из операций исследования монотонной функции является ее дифференцирование или взятие первой производной для нахождения в ней локальных экстремумов (минимумов и максимумов). Поэтому для определения минимума полученной функции возьмем первую производную по переменной h_i и приравняем ее к нулю (условие существования локального экстремума). Получим:

$$f'(H) = 2p_1(H - h_1) + 2p_2(H - h_2) + 2p_3(H - h_3) = 0.$$

Преобразуем полученное выражение таким образом, чтобы искомая величина **H** осталось в левой части выражения. Для этого раскроем скобки и выполним элементарные преобразования, получим:

$$2H(p_1 + p_2 + p_3) - 2(h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3) = 0,$$

$$2H(p_1 + p_2 + p_3) = 2(h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3).$$

Разделим правую и левую части уравнения на $2(p_1 + p_2 + p_3)$ получим:

$$H = \frac{h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[ph]}{[p]}\,. \qquad (1.4)$$

Выражение (1.4) представляет собой общую арифметическую середину, свойства которой рассматривались в п.п.6.3 первого модуля.

Для того чтобы определить какой из локальных экстремумов найден (минимум или максимум) продолжим исследовать функцию определяя ее выпуклость или вогнутость. Для этого возьмем вторую производную от полученной функции. Обозначим

$$b = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} > 0.$$

Выражение (1.4) примет вид:

$$H = b(h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3),$$

тогда $f''(H) = b(p_1 + p_2 + p_3) = b[p] > 0$. Следовательно, если вторая производная функции больше нуля, то локальный экстремум функции является ее минимумом. Следовательно, справедливо записать:

$$f(H) = [pV^2] \to min.$$

Получено единственное решение системы уравнений (1.2). При этом оно оказалось выражением для вычисления общей арифметической середины, что подтверждает единство метода наименьших квадратов и метода вычисления арифметической середины.

Из системы линейных уравнений (1.2) и полученной общей арифметической середины следует, что ее решение будет соответствовать минимуму функции (1.3) и соответственно минимуму эмпирической среднеквадратической погрешности единицы веса, которая характеризует точность неравноточных измерений и вычисляется по формуле (см. модуль 1, п.п.6.1, доказательство теоремы 6.1, формула 6.31):

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{[n-1]}.$$

Следовательно, вес определяемой величины можно определить по формуле :

$$P_H = \frac{c[p]}{\mu^2},$$

где c – произвольная положительная постоянная.

Очевидно, что при любых значениях **c** и [p] вес измеряемой величины P_H будет максимальным. Поэтому решение, найденное способом наименьших квадратов соответствует наибольшему весу определяемой величины.

Возникает вопрос, насколько принцип наименьших квадратов отвечает природе накопления погрешностей измерений и становятся ли значения измеренных величин, исправленные поправками, найденными методом наименьших квадратов, ближе к истинным значениям?

Ответим на этот вопрос высказываниями известного немецкого геодезиста Ф.Р. Гельмерта, который еще в конце 19-го века сделал следующие разъяснение:

1. Если результаты измерений содержат только случайные погрешности, подчиняющиеся нормальному закону распределения, то значения неизвестных, полученные методом наименьших квадратов будут вероятнейшими значениями неизвестных и будут обладать наименьшей среднеквадратической погрешностью.

2. Если результаты измерений содержат погрешности, обладающие только свойствами компенсации (см. модуль 1, п.п.2.5, *свойства ограниченности, независимости, рассеивания*) значения неизвестных, хотя и будут иметь наибольший вес, но не могут считаться вероятнейшими значениями неизвестных.

3. Если же результаты измерений помимо случайных, существенно отягощены систематическими погрешностями, то уравнивание измерений методом наименьших квадратов даст, как всегда однозначное решение, но найденные значения не будут вероятнейшими и не будут обладать наибольшим весом.

Таким образом, неопределенность систем уравнений, описывающих процессы измерений (см. п.п. 1.2), а также разъяснения, сделанные Ф.Р. Гельмерта обусловило появления двух способов уравнивания геодезических построений – *параметрический способ*, используемый в случае, если неопределенность системы уравнений носит переопределенный характер и *способ уравнивания измеренных величин, связанных некоторыми условиями,* если система уравнений является недоопределенной. Последний способ еще называется коррелатным.