

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ КАТЕГОРИИ ИЕРАРХИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

(Представил д.т.н. Метешкин А.А.)

Исследуются особенности представления объектов категории иерархическими структурами. Предлагается иерархическую структуру представлять теоретико-модельной конструкцией.

Последнее десятилетие уходящего столетия характеризуется бурным развитием информационных технологий, основу которых составляют средства коммуникаций. Все чаще с целью управления организационно-техническими системами, обладающими сложными многоуровневыми структурами, применяются вычислительные сети различного уровня (глобальные, корпоративные, локальные). Для управления такими системами, тенденции, развития которых показаны в работе [1], требуется разработка специального математического обеспечения (СМО). Сложность отношений между элементами в многоуровневых иерархических системах не позволяет использовать для формального описания процессов управления, традиционно применяемые при этом формальные системы в виде логических исчислений (исчислений высказываний, предикатов различных порядков и др.).

Для разработки СМО, которое обеспечивало бы заданный уровень общности описанию процессов управления, и вместе с тем, удовлетворяло условию совместимости с другим математическим аппаратом, которым пользуются при формальном представлении объектов и процессов на отдельных уровнях иерархии сложной многоуровневой системы воспользуемся методами теории категорий.

Теория категорий является одним из приложений общей топологии [2,3], методы которой позволяют формально представлять процессы управления сложными системами в обобщенном виде.

Основопологающим понятием в теории категорий является понятие - "объект категории", который обозначается (Ob). Примечательным свойством представления категории в виде взаимосвязанной совокупности ее объектов является то, что объекты категории могут быть любой природы. Другими словами, объекты категории могут быть заданы множествами, топологическими пространствами, алгебраическими конструкциями, формальными теориями и др.

При разработке моделей, обеспечивающих управление сложными многоуровневыми системами, необходимо учитывать их структуру. Поэтому при задании объектов категории особый интерес представляют объекты, структура которых определяется следующими соотношениями:

$$\{\{\{O_1 \subset O_2\} \subset O_3\} \subset \dots \subset O_n\} = O; \quad (1)$$

$$O_1 > O_2 > O_3 > \dots > O_n; \quad (2)$$

$$f : (o_i^j \in O_j) \rightarrow \{ o_k^\xi \} \in O_\xi, \quad (3)$$

где i - элемент множества O_j , n - количество уровней в структуре объекта категории, $k = \overline{1, \alpha}$ - номер элемента множества O_ξ .

Первое соотношение определяет вложенный характер структуры задаваемого объекта категории. В теории сложности [4] такие конструкции множеств называют "башнями множеств". Во втором соотношении знак ">" обозначает отношение строгого порядка, т.е. между элементами различных уровней иерархии структуры объекта категории существуют отношения строгого порядка. Третье соотношение ставит в соответствие один, i -й элемент вышестоящего уровня O_j , нескольким элементам $k = \overline{1, \alpha}$, нижестоящего уровня иерархии O_ξ задаваемого объекта категории.

Графически такой составной объект категории (составной потому, что состоит из нескольких уровней вложений) можно представить в виде некоторой совокупности множеств, связанных конусами морфизмов (см. рис.1). Понятие конуса морфизмов приведено в работе [2].

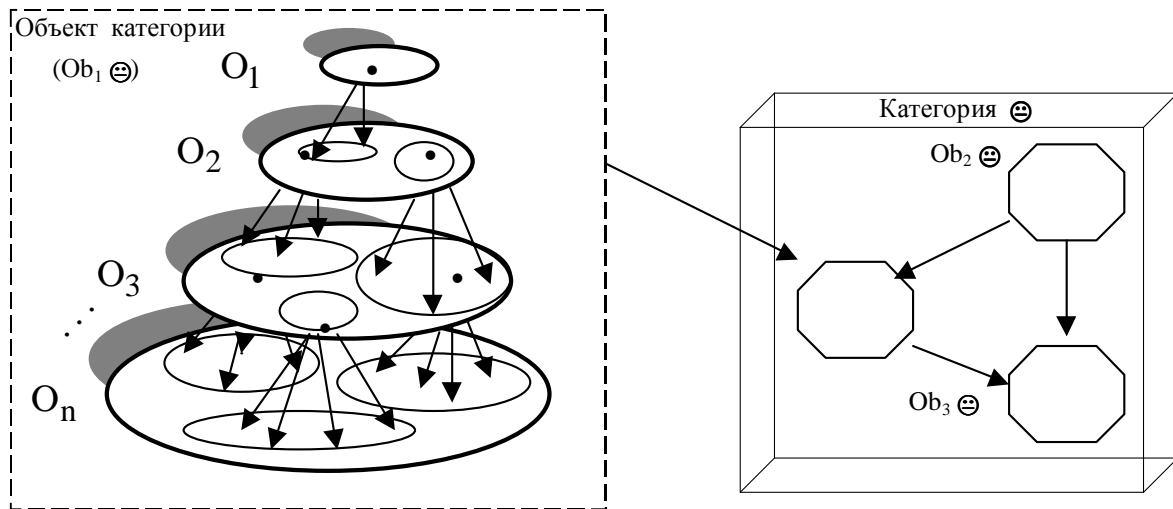


Рис. 1. Иллюстрация объекта категории в виде многоуровневой иерархической структуры

Предположим, что для каждого уровня иерархии исследуемого объекта разработаны формальные теории, описывающие ее предметные области. Формальную теорию в обобщенном виде представим тройкой

$$\mathcal{O}_i = \langle \Sigma_{O_i}, A_{O_i}, L_{O_i} \rangle, \quad i = \overline{1, n},$$

где Σ_{O_i} - сигнатура теории, состоящая из кортежа моделей $\{M_{O_i}^1, M_{O_i}^2, \dots, M_{O_i}^m\} \in \Sigma_{O_i}$, которыми формально представляются элементы предметной области O_i -го уровня иерархии объекта категории;

A_{O_i} - аксиоматика (система аксиом) над сигнатурой Σ_{O_i} , где $\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \in A_{O_i}$, N - количество аксиом; L_{O_i} - правила логического вывода, позволяющие из аксиом теории выводить теоремы (следствия или заключения).

Заметим, что модели M_{O_i} формально представляются набором базовых множеств и отношениями между ними, что соответствует записи $M_{O_i}^h = \{B_v, W_q\}$, где h - ординал сигнатуры теории, а v и q - индексы соответствующие текущим номерам базового множества элементов модели (B) и множества отношений (W) между ними, соответственно.

Предположим, что предметные области всех уровней иерархии объекта категории представлены формальными теориями $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n$ и их сигнатуры содержат модель являющуюся началом конусов морфизмов.

Тогда можно записать $\overset{\bullet}{M}_O \in \Sigma_O, \overset{\circ}{M}_{O_1} \in \Sigma_{O_1}, \dots, \overset{\circ}{M}_{O_n} \in \Sigma_{O_n}$, где $\overset{\bullet}{M}_O$ корневая модель, принадлежащая сигнатуре Σ_O формальной теории \mathcal{S}_0 , а $\overset{\circ}{M}_{O_1}, \dots, \overset{\circ}{M}_{O_n}$ узловые модели соответствующих сигнатур формальных теорий $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$, которые также являются вершинами конусов морфизмов, но на смежных уровнях иерархии объекта категории.

Сделанные предположения, а также соотношения (1,2,3) позволяют записать следующую теоретико-модельную конструкцию

$$\mathcal{S}_0 \supset \begin{cases} \mathcal{S}_1^1 \supset \begin{cases} \mathcal{S}_1^{1.2} \supset \dots; \\ \vdots \\ \mathcal{S}_\beta^{1.2} \supset \dots; \end{cases} \\ \vdots \\ \mathcal{S}_\alpha^1 \supset \begin{cases} \mathcal{S}_1^{\alpha.2} \supset \dots; \\ \vdots \\ \mathcal{S}_\chi^{\alpha.2} \supset \dots, \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

которая будет справедлива лишь в том случае, когда сигнатуры формальных теорий не пересекаются. В этом случае справедливо соотношение

$$\Sigma_{O_0} = \Sigma_{O_1} \cup \Sigma_{O_2} \cup \dots \cup \Sigma_{O_n}. \quad (5)$$

Другими словами, сигнатура формальной теории \mathcal{S}_0 будет объединять все подмножества моделей, лежащих у основания конусов морфизмов всех уровней иерархии составного объекта (см. рис. 1).

Аналогичным образом для \mathcal{S}_0 формируется аксиоматика, обозначим ее A_{O_0} .

В математической логике логический вывод на иерархических структурах называется деревом вывода. Доказательство возможности логического вывода на древовидных структурах при условии, что вершины древовидного графа не пересекаются, приведены в работе [5]. Учитывая результаты этих доказательств, будем полагать, что дерево вывода, обозначим его L_{O_0} , объединяет все теоремы формальных теорий $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$. Тогда окончательно можно записать

$$\mathcal{S}_0 = \langle \Sigma_{O_0}, A_{O_0}, L_{O_0} \rangle. \quad (6)$$

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, формальные теории должны разрабатываться в рамках единого формализма. Во-вторых, $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ являются подтеориями теории \mathcal{S}_0 и для проверки ее непротиворечивости необходимо проверить на непротиворечивость все подтеории. Проверка на непротиворечивость теоретико-модельной конструкции (4) выходит за рамки настоящей работы. Здесь также не приводятся более сложные преобразования, связанные с пересечением сигнатур формальных подтеорий одного уровня иерархии структуры O .

Таким образом, предложен относительно простой вариант представления объекта категории. Предложенный метод представления объекта категории позволяет перейти от иерархической структуры к одной формальной теории \mathcal{S}_0 , что значительно упрощает построение правил, задающих переход из одной категории в другую, т.е. задание функтора между категориями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метешкин К.А., Чевардин В.Е. Тенденции развития структур организационных систем военного назначения // Системи обробки інформації. Збірник наукових праць. Вип 1(7). - Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2000. - С.85 - 89.
2. Александрян Р.А., Мирзахонян Э.А. Общая топология. - М: Высш. школа, 1979. - 336 с.
3. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко: Учеб. Пособие. - 2 - е изд., доп.- М.: Наука. Физматлит, 1995. - 416 с.
4. Солодовников В.В., Тумаркин В.И. Теория сложности и проектирование систем управления. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1990. - 168 с.
5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука. 1971. - 320 с.

Опубликована!

Метешкин К.А. Особенности представления объектов категории иерархическими структурами // Системы обработки информации. Збірник наукових праць. Вип. 4(10). - ХФВ "Транспорт України, 2000. - С. 143 - 146.