Вирішення задач з обчислення середніх квадратичних похибок функцій виміряних величин

Теоретичні пояснення. При непрямих вимірюваннях значення шуканою величини отримують через безпосередньо виміряні величини. Оскільки значення безпосередньо виміряних величин отримані з похибками, то і значення шуканої величини, як функції від них, також буде отримано з якоюсь похибкою. Тому виникає задача визначення середньої квадратичної похибки функції виміряних величин.

Якщо є функція

$$y = f\,(x_1, x_2 \ldots x_t), \tag{1}$$

аргументи якої x_1, x_2 … x_t – незалежні результати безпосередніх вимірювань величин X_1, X_2 … X_t , виконаних із середніми квадратичними похибками m_1, m_2 … m_t , то середня квадратична похибка даної функції дорівнюватиме

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 m_t^2}\ , \tag{2}$$

де $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ – часткові похідні функції виміряних величин;

m_i – середні квадратичні похибки виміряних величин.

Вирішення задач на визначення середніх квадратичних похибок функції виміряних величин виконують в такій послідовності:

1. Функцію (1) записують в явному вигляді;
2. Знаходять часткові похідні цієї функції за всіма незалежними змінними;
3. Підставляють часткові похідні й середні квадратичні похибки в формулу (2);
4. Виконують необхідні математичні перетворення й отримують кінцевий результат.

Приклад. Обчислити прирости координат *ΔX, ΔY* та їх середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$, $m_{\Delta Y}$, якщо довжина лінії виміряна з середньою квадратичною похибкою $m_d=0.1м$, і становить d = *120.0 м*, а її дирекційний кут α = *60˚00'* виміряний з середньою квадратичною похибкою m_d*=1.5'* (див. рис. 1)

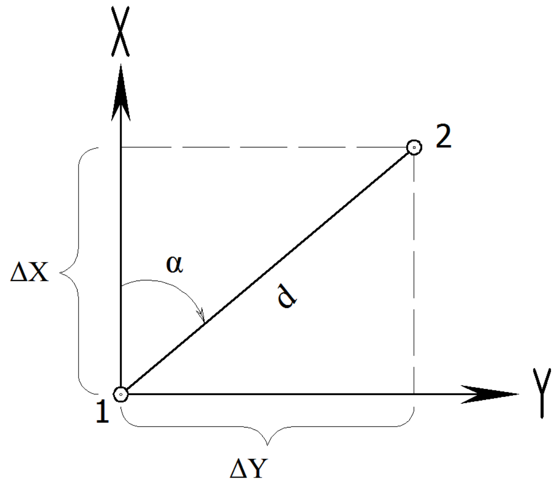

Рис. 1 – Схема, що пояснює зміст задачі

Виразимо функціонально прирости координат *ΔX* та *ΔY* через лінію d та її дирекцій ний кут α

$$\Delta X = d \cdot \cos\alpha;$$
$$\Delta Y = d \cdot \sin\alpha.$$

Обчислимо значення приростів координат *ΔX* та *ΔY*

$$\Delta X = 120 \cdot \cos 60˚00' = 60.0\ м;$$
$$\Delta Y = 120 \cdot \sin 60˚00' = 103.9\ м.$$

Знайдемо часткові похідні функцій *ΔX* та *ΔY* за змінними d і α.

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = \cos\alpha;$$
$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = -d \cdot \sin\alpha;$$
$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = \sin\alpha;$$
$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = d \cdot \cos\alpha.$$

Обчислимо значення часткових похідних $\frac{\partial \Delta X}{\partial d}$, $\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \Delta Y}{\partial d}$ і $\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha}$

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = \cos 60˚00' = 0.5000;$$

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = -120.0 \cdot \sin 60^{\circ}00' = 103.92 \text{ м};$$

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = \sin 60^{\circ}00' = 0.8660;$$

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = 120 \cdot \cos 60^{\circ}00' = 60.00 \text{ м}.$$

Підставляємо значення часткових похідних та середніх квадратичних похибок у вираз (2)

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(0.5000)^2 \cdot 0.1^2 + 103.92^2 \cdot \frac{1.5^2}{\rho^2}} = 0.05 \text{ м};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(0.8660)^2 \cdot 0.1^2 + 60.00^2 \cdot \frac{1.5^2}{\rho^2}} = 0.09 \text{ м},$$

де – ρ' = 3438' – кількість мінут у радіані.

Ділення на ρ'^2 в даному прикладі здійснюється тому, що середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$, $m_{\Delta Y}$ виміряних приростів ΔX, ΔY виражаються в лінійних одиницях.