2.5. Структуризация методологических начал современной математики

Пример формирования методологии политэкономии и других общественных, технических и естественных наук показывает, что в методологии наук к концу XIX в., происходят существенные структурные преобразования. Они связаны, во-первых, со значительной интеграцией методов математики с методами естественных, технических и общественных (гуманитарных) наук. Во-вторых, формируется некоторая структура методической базы собственно математики, которая содержит три основные составляющие – множество методов вычислительной математики, множество методов интерпретационной математики и метаматематики (см. рис.2.27).

Рис. 2.27. Обобщенная структура методической базы современной математики и ее прагматическая значимость

Упорядочить и структурировать методологию математики в 1935 году попыталась группа европейских ученых математиков, которые дерзнули написать трактат по современной математики «Начала математики». Основателями группы математиков были французские ученые Клод Шевалле, Жан Кулон, Жан Дельсарт, Жан Дьёдонне, Шарль Эресманн, Рене де Поссель, Шолем Мандельбройт, Андре Вейль и другие европейские выдающиеся математики, входившие в группу под коллективным псевдонимом «Николя Бурбаки» (см. рис.2.28).

Из шестнадцати задуманных томов трактата «Начала математики» группа «Бурбаки» полностью издала 6 томов не включая том по истории развития математики. Их названия и последовательность изданий свидетельствует о том, какие разделы математики являются система образующими в методологии всей математики, а какие надстройкой в современной математике.

Последовательность издания томов трактата «Начала математики» следующая: История математики; том 1, Теория множеств; том 2, Алгебра; том 3, Топология; том 4, Функции действительного переменного; том 5, Топологические векторные пространства; том 6, Интегрирование. Позже стали выходить книги без номеров «Коммутативная алгебра», «Дифференцируемые и аналитические многообразия», «Группы Ли» и «Спектральная теория».

Математики группы «Бурбаки» не только обобщали и структурировали существующие математические методы, но и вводили новые методы, символы и формальные представления.

Рис. 2.28. Основатели группы «Н.Бурбаки»

Например, ими введен символ пустого множества «∅ » и уточнено определение термину «множество», введены специальные символы обозначающие множество натуральных $\mathbb{N}$, целых $\mathbb{Z}$, рациональных $\mathbb{Q}$, действительных $\mathbb{R}$ и комплексных $\mathbb{C}$ чисел, определены термины «инъекция», «сюръекция» и «биекция». Введен знак «опасный поворот» и т.д. Работа группы математиков «Бурбаки» проводилась с разной степенью интенсивности. Наиболее плодотворные годы для группы были 1950 - 1960 г.г. После известных событий в Париже в 1968 году, которые имели название «Парижская весна 1968 г.» (социальный кризис во Франции) группа «Бурбаки» практически распалась, но книги по математики выходили до 1998 года. Последняя книга имела название «Коммутативная алгебра».

Со второй половины XX в. в рамках зарождающейся науке об управлении – кибернетики, формируются идеи создания модели искусственного интеллекта. Для реализации этих идей совершенствуются старые и разрабатываются новые абстрактные методы, модели, формальные системы и теории, которые способны описывать работу человеческого мозга и математически описать логику решения сложных задач и представить в виде логических моделей отдельные предметные области. В этой связи начинает формироваться важный для этих целей раздел математики, который получил название «дискретная математика». Она в первую очередь направлена на описание дискретных вычислительных процессов, обеспечивающих функционирование электронных вычислительных машин, а затем и для формального представления интеллектуальных процессов. Основу дискретной математики составила теория множеств Г.Кантора и алгебра отношений, при помощи которой можно задать модели различной степени абстракции из различных предметных областей. Например, некоторая модель, записанная на теоретико-множественном языке имеет вид: $\mathrm{K} = \langle \mathrm{A}, \Omega \rangle$, где $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$. Здесь показано, что некоторая модель К состоит из множеств **A**, состоящее из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и множества отношений $\boldsymbol{\Omega}$, состоящее из m отношений $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ между элементами множества А. Содержательная интерпретация таких моделей показана на рис.1.2 и рис.1.3, а их усложнение на рис.1.12 и рис.1.18.

Для формализации (представления) и интерпретации логики рассуждений человека в дискретную математику введены формальные системы (см. рис.2.29), основанные на булевой алгебре, получившие названия «исчисления высказываний», «исчисление предикатов» и «формальные теории», которые имеют собственный алфавит и правила грамматики (синтаксические и морфологические) для записи логических формул.

Рис. 2.29. Основа дискретной математики

Дискретная математика получила свое развитие за счет допущений, которые ввел Лотфи Заде в 1965 году в теорию множеств. Он предположил, что индикаторная функция классического множества может принимать не только значения 0 и 1 (истина и лож), но и промежуточные значения в интервале [0,1]. В теории нечетких множеств такая функция получила название функцией принадлежности. В нечеткой логике она представляет степень принадлежности каждого члена пространства рассуждения к данному нечеткому множеству.

С середины XX в. под влиянием результатов полученных Г.Кантором, А.Пуанкаре (1854–1912 г.г.) и Л.Брауэром (1881–1966 г.г.) продолжает формироваться и структурироваться топология – часть геометрии, исследующая качественные свойства фигур не зависящих от таких понятий как длина, прямолинейность, величина угла и т.д.

Рис. 2.30. Профессор Калифорнийского университета в Беркли

Развитие топологии обусловлено созданием кибернетики и построения математического обеспечения к интеллектуальным и информационным системам.

Условно топологию представляют тремя основными разделами (см. рис.2.31). *Дифференциальная геометрия* изучает геометрические формы, в первую очередь кривые и поверхности, а также семейства кривых и поверхностей методами анализа бесконечно малых. Основывается на исследованиях Л. Эйлера и Г. Монжа, а также К.Гаусса. Открытие Н.И.Лобачевским неевклидовой геометрии сыграло огромную роль в развитии дифференциальной геометрии. Продолжил совершенствовать неевклидову геометрию в 1854 году Б.Риман, создав геометрию в которой доказывается теорема, что сумма углов треугольника больше суммы двух прямых углов, т.е. 180 градусов.

Методы и геометрические построения дифференциальной геометрии в настоящее время широко используются при построении моделей подстилающих поверхностей Земли с учетом ее кривизны в геоинформационных системах и технологиях и в целом для создания их математического обеспечения.

Алгебраическая топология изучает топологические пространства путем сопоставления им различного рода алгебр. На рис.2.29 они показаны как абстрактные, не классические формальные системы, например, топологические булевы алгебры, модальные логики, логика присутствия и другие логики. Методы алгебраической топологии, в основном формализации, предназначены для интерпретации интеллектуальных процессов и построения моделей искусственного интеллекта.

Теория категорий - раздел общей топологии, изучающий свойства отношений между математическими объектами (моделями), не зависящие от внутренней структуры объекта.

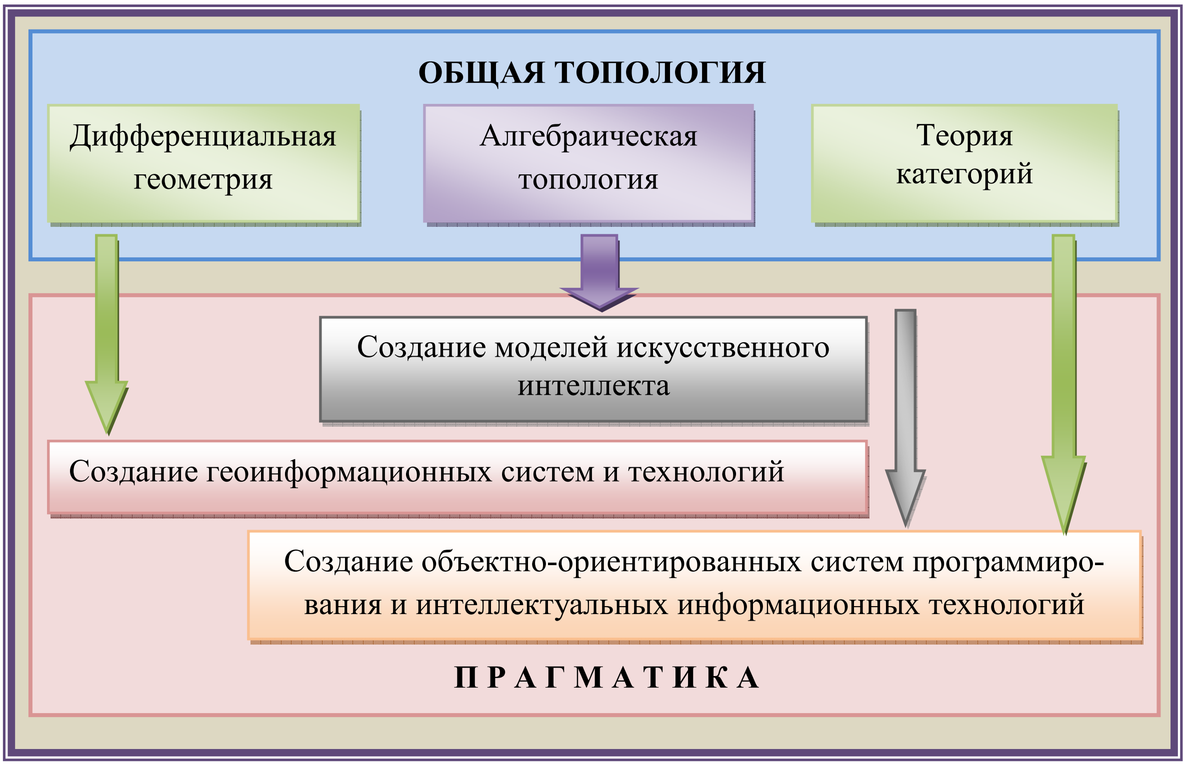

Рис. 2.31. Прагматический аспект общей топологии

Категорию **C**, например, составляет класс объектов Ob_{C}. Примерами категорий могут быть: категория множеств **Set**, категория групп **Group**, категория векторных пространств над полем К $\mathbf{Vect}_{\mathrm{K}}$ и другие математические конструкции. Теория категорий оперирует такими понятиями как категория, объект, функтор, кнус и коконус морфизмов, коммутативная диаграмма и другими абстрактными понятиями. Она по описательным возможностям превосходит теорию множеств, и за счет высокой степени обобщений и абстрактного представления объектов позволяет представлять связи между сложными математическими моделями. Свойства и возможности теории категорий обеспечили построение объектно-ориентированных систем программирования высокого уровня, а также построение математического обеспечения сложных распределенных интеллектуальных систем сбора, обработки и передачи информации. Абстрактные и описательные возможности теории категорий позволяют ее поставить в один ряд с теорией доказательств на вершине «математической пирамиды» и отнести к метаматематике (см. рис.2.27).

Рекомендации.

1. Напомним научно-педагогическим и педагогическим работниками, что на входе в академию Платона, первого высшего учебного заведения, был высечен весьма категорический лозунг:

Да не войдет сюда тот, кто не знает геометрии

Этот лозунг утверждает, что высшее образование предполагает обязательное знание математики. Научно-педагогический работник обязательно должен знать ответ на вопрос студента: «Зачем нам нужны знания по математике?». Поэтому педагогу, не зависимо от преподаваемой дисциплины, можно порекомендовать заранее продумать ответ на этот сложный вопрос. Ответ должен учитывать особенности специальности обучения студентов, а также специфику преподаваемой дисциплины и разделов математики, которые используются при ее изучении или могут быть использованы.